Lista 9 - Séries

Exercício 1. Encontre o raio de convergência das seguintes séries de potências:

$$\text{a)} \quad \sum n^3 x^n, \qquad \text{b)} \quad \sum \frac{2^n}{n!} x^n, \tag{1}$$

$$\text{c)} \quad \sum \frac{2^n}{n^2} x^n, \qquad \text{d)} \quad \sum \frac{n^3}{3^n} x^n. \tag{2}$$

Exercício 2. Suponha que uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ tenha raio de convergência $R = 2$. Determine o raio de convergência das seguintes séries onde k é um inteiro positivo fixo.

$$\text{a)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n^k x^n, \qquad \text{b)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{kn} \qquad \text{c)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n^2}. \tag{3}$$

Exercício 3. Suponha que os coeficientes da série de potências $\sum a_n x^n$ são inteiros, nos quais infinitos deles são diferentes de zero. Mostre que o raio de convergência da série é no máximo 1.

Exercício 4. Dada uma sequência de números reais $\{x_n\}$, defina sua média aritmética σ_n como segue para todo $n = 0, 1, \ldots$

$$\sigma_n = \frac{x_0 + x_1 + \ldots + x_n}{n + 1}.$$

a) Mostre que, se $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, então $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = x$.

b) Construa uma sequência $\{x_n\}$ que não converge mas que $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$.

c) Pode acontecer de $x_n > 0$ para todo n e que $\limsup_{n\to\infty} x_n = \infty$, embora $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$. Justifique sua resposta.

Exercício 5. Dada uma série de números reais $\sum a_n$, defina

$$p_n = \frac{|a_n| + a_n}{2} \quad \text{e} \quad q_n = \frac{|a_n| - a_n}{2}.$$

Mostre que:

a) Se $\sum a_n$ é condicionalmente convergente, i.e. $\sum a_n$ converge mas $\sum |a_n|$ diverge, então ambas $\sum p_n$ e $\sum q_n$ divergem.

b) Se $\sum |a_n|$ converge, então ambas $\sum p_n$ e $\sum q_n$ convergem e vale a equação:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} p_n - \sum_{n=1}^{\infty} q_n.$$

Exercício 6. Dada uma série de números reais $\sum a_n$, defina

$$r = \liminf_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \quad \text{e} \quad R = \limsup_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Mostre que:

a) A série $\sum a_n$ converge absolutamente se $R < 1$;

b) A série $\sum a_n$ diverge se $r > 1$;

c) O teste é inconclusivo se $r \leq 1 \leq R$.

Exercício 7 (Teste de Abel)**.** Mostre que, se $\sum a_n$ converge e $\{b_n\}$ é uma sequência monótona convergente, então a série $\sum a_n b_n$ converge.

Exercício 8. Considere uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ cujos coeficientes estão relacionados através da seguinte equação:

$$a_n + Aa_{n-1} + Ba_{n-2} = 0, \quad \forall n = 2, 3, \ldots$$

Mostre que, para todo x no qual a série converge, tem-se que a soma da série é:

$$\frac{a_0 + (a_1 + Aa_0)x}{1 + Ax + Bx^2}.$$