Lista 8 - Séries

Exercício 1. Mostre que uma série de termos não-negativos converge se e somente se a sequência das somas parciais é limitada.

Exercício 2. Sejam $a = \sum a_n$ e $b = \sum b_n$ séries convergentes. Mostre que, para quaisquer constantes α e β, a série $\sum(\alpha a_n + \beta b_n)$ converge para a soma $\alpha a + \beta b$, i.e.,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Exercício 3. Mostre que:

a) Se $|a_n| \leq c_n$ para $n \geq N_0$, onde N_0 é um inteiro fixo, e se $\sum c_n$ converge, então $\sum a_n$ também converge.

b) Se $a_n \geq d_n \geq 0$ para $n \geq N_0$, e se $\sum d_n$ diverge, então $\sum a_n$ também diverge.

Exercício 4. Suponha que $a_n > 0$ e $b_n > 0$ para todo $n = 1, 2, \ldots$. Mostre que, se existe uma constante positiva c e um inteiro N tais que $a_n < cb_n$ para todo $n \geq N$, então a convergência de $\sum b_n$ implica a convergência de $\sum a_n$.

Exercício 5 (Teste da Comparação no Limite)**.** Suponha que $a_n > 0$ e $b_n > 0$ para todo $n = 1, 2, \ldots$ são tais que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

Mostre que $\sum a_n$ converge se, e somente se, $\sum b_n$ converge.

Exercício 6. Suponha que $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq 0$. Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se, e somente se, a série $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ converge.

Exercício 7. Mostre que as seguintes séries convergem se $p > 1$ e divergem se $p \geq 1$:

$$\text{a)} \sum \frac{1}{n^p}, \qquad \text{b)} \sum \frac{1}{n(\ln n)^p}, \qquad \text{c)} \sum \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^p}. \tag{1}$$

Exercício 8. Mostre que

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Exercício 9. Mostre que o número $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ é um irracional.

Exercício 10. Investige o comportamento (convergência ou divergência) da série $\sum a_n$ se:

$$\text{a)}\ a_n = \sqrt{n-1} - \sqrt{n}, \qquad \text{b)}\ a_n = \frac{\sqrt{n-1} - \sqrt{n}}{n}, \tag{2}$$

$$\text{c)}\ a_n = (\sqrt[n]{n} - 1)^n, \qquad \text{d)}\ a_n = \frac{1}{1 + x^n}, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Exercício 11. Prove que, se $\sum a_n$ converge e $a_n \geq 0$, então a seguinte série também converge:

$$\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}.$$