Lista 7 - Sequências de Cauchy, Subsequências e Questões Relacionadas.

Definição 1. *Uma sequência de números reais* $\{s_n\}$ *é dita*

a) crescente *se* $s_n \leq s_{n+1}$ *para todo* $n = 1, 2, \ldots$*,*

b) decrescente *se* $s_{n+1} \leq s_n$ *para todo* $n = 1, 2, \ldots$*,*

c) monótona *se é crescente ou decrescente.*

Exercício 1. Seja $\{s_m\}$ uma sequência monótona de números reais. Mostre que $\{s_n\}$ converge se, e somente se, é limitada.

Exercício 2. Prove que a convergência de uma sequência de números reais $\{s_n\}$ implica a convergência da sequência $\{|s_n|\}$. A recíproca é verdadeira? Justifique sua resposta.

Exercício 3. Seja $s_1 = \sqrt{2}$ e defina

$$s_{n+1} = \sqrt{2 + \sqrt{s_n}} \quad \text{para todo} n = 1, 2, \ldots$$

Mostre que $\{s_n\}$ converge e que $s_n < 2$ para todo $n = 1, 2, \ldots$.

Exercício 4. Mostre que a sequência de números reais definida abaixo converge.

$$x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \quad \forall n = 1, 2, \ldots$$

Exercício 5. Seja a_n uma sequência de números reais tais que

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|a_{n+1} - a_n|, \quad \forall n \geq 1.$$

Mostre que a sequência $\{a_n\}$ converge.

Exercício 6. Determine o limite superior e inferior das seguintes sequências:

a) $a_n = (-1)^n$,

b) $a_n = (-1)^n(1 + 1/n)$,

c) $a_n = (-1)^n n$,

d) $a_n = n^2 \sin^2(n\pi/2)$.

Exercício 7. Considere sequências de números reais $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$. Mostre que

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n,$$

dado que a soma do lado direito não forneça a indeterminação $\infty - \infty$.

Exercício 8. Seja $\{a_n\}$ uma sequência de números reais. Mostre que:

a) $\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$.

b) A sequência $\{a_n\}$ converge se, e somente se, $\liminf_{n\to\infty} a_n$ e $\limsup_{n\to\infty} a_n$ são ambos finitos e iguais. Nesse caso, tem-se $\lim_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$.

c) Tem-se $a_n \to +\infty$ se, e somente se, $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

d) Tem-se $a_n \to -\infty$ se, e somente se, $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Exercício 9. Sejam $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sequências de números reais. Mostre que, se $a_n \leq b_n$ para todo $n = 1, 2, \ldots$, então

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} b_n \quad \text{e} \quad \limsup_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

Exercício 10. Sejam $\{p_n\}$ e $\{q_n\}$ sequências de Cauchy num espaço métrico (X, d). Mostre que a sequência de números reais $\{d(p_n, q_n)\}$ converge.

Exercício 11. Seja (X, d) um espaço métrico. Mostre que se $T \subseteq X$ é um conjunto compacto, então T é completo, i.e., toda sequência de Cauchy definida em T é convergente em T.