Lista 6 - Sequências

Exercício 1. Seja $\{s_n\}$ uma sequencia de números reais. Mostre que $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ se, e somente se, $\lim_{n\to\infty}(s_n - s) = 0$.

Exercício 2. Demostre as seguintes afirmações sobre sequências de números reais.

a) $x^n \to 0$ se $|x| < 1$ e diverge se $|x| > 1$.

b) Se $s_n \to 0$ e $\{c_n\}$ é uma sequencia limitada, então $\{c_n s_n\} \to 0$.

c) $x^n/n! \to 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

d) Se $a_n = \sqrt{n^2+2} - n$, então $a_n \to 0$.

Exercício 3. Seja $0 < x_1 < 1$ e $x_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - x_n}$ para todo $n \geq 1$. Mostre que $\{x_n\}$ é uma sequencia decrescente, i.e. $x_{n+1} \leq x_n$, que converge para zero. Mostre também que $x_{n+1}/x_n \to 1/2$.

Exercício 4. Considere sequencias de inteiros positivos $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ definidas recursivamente tomando $a_1 = b_1 = 1$ e igualando as partes racionais e irracionais da seguinte equação para $n \geq 2$:

$$a_n + b_n\sqrt{2} = (a_{n-1} + b_{n-1}\sqrt{2})^2.$$

Mostre que $a_n^2 - 2b_n^2 = 1$ para $n \geq 2$. Conclua que $a_m/b_n \to \sqrt{2}$ por valores maiores que $\sqrt{2}$ e que $2b_n/a_n \to \sqrt{2}$ por valores menores que $\sqrt{2}$.

Exercício 5. Seja (X,d) um espaço métrico. Mostre que, se $x_n \to x$ e $y_n \to y$, então $d(x_n, y_n) \to d(x,y)$.

Exercício 6. Seja (X,d) um espaço métrico e $\{p_n\}$ uma sequência em X. Mostre que $\{p_n\}$ converge para $p \in X$ se, e somente se, todas as subsequencias de $\{p_n\}$ convergem para p.