

Lista 4 - Espaços Métricos, Conjuntos Abertos e Fechados e Pontos Aderentes e de Acumulação.

Exercício 1. Considere as seguintes métricas em \mathbb{R}^n :

$$d_m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| \quad \text{e} \quad d_s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|,$$

onde $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ e $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]$. Apresente a figura geométrica dada pela bola aberta $B(\mathbf{0}, 1)$ de raio 1 e centro na origem $\mathbf{0}$ para os espaços métricos (\mathbb{R}^2, d_m) e (\mathbb{R}^2, d_s) .

Exercício 2. Sejam d_m e d_s as métricas do exercício anterior e seja $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ a métrica Euclidiana usual derivada do produto interno de \mathbb{R}^n . Mostre que as seguintes desigualdades são válidas para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$:

$$d_m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq d_s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \text{e} \quad d_s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \sqrt{n} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq n d_m(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Exercício 3. Seja (M, d) um espaço métrico e defina

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}.$$

Mostre que $0 \leq d'(x, y) < 1$ para todo $x, y \in M$. Mostre também que d' é também uma métrica em M .

Exercício 4. Mostre que um intervalo aberto em \mathbb{R} é um conjunto aberto e que um intervalo fechado é um conjunto fechado.

Exercício 5. Determine os pontos de acumulação dos seguintes conjuntos de \mathbb{R} e determine se este é um conjunto aberto, fechado ou nenhum dos dois.

- O conjunto dos inteiros;
- O intervalo $(a, b]$;
- O conjunto de todos os números da forma $1/n$, para $n = 1, 2, \dots$;
- O conjunto dos números racionais;
- O conjunto de todos os números da forma $(-1)^n + 1/m$, para $m, n = 1, 2, \dots$;
- O conjunto de todos os números da forma $(1/n) + (1/m)$, para $m, n = 1, 2, \dots$;

Exercício 6. Mostre que todo conjunto aberto não-vazio de \mathbb{R} contém números racionais e irracionais;

Exercício 7. Mostre que, em \mathbb{R} , o conjunto vazio \emptyset e o próprio conjunto dos reais \mathbb{R} são ambos abertos e fechados.

Exercício 8. Mostre que o interior S° de um subconjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto em \mathbb{R}^n .

Exercício 9. Um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ é dito *convexo* se para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ e todo real $\theta \in (0, 1)$, tem-se $\theta\mathbf{x} + (1-\theta)\mathbf{y} \in S$. Apresente uma interpretação geométrica desse conceito em \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 e mostre que toda bola aberta em \mathbb{R}^n é convexa.

Exercício 10. Se S e T são subconjuntos de \mathbb{R}^n , mostre que

$$(S^\circ) \cap (T^\circ) = (S \cap T)^\circ \quad \text{e} \quad (S^\circ) \cup (T^\circ) \subseteq (S \cup T)^\circ.$$

Exercício 11. Seja X um espaço métrico e $A, B \subseteq X$. Mostre que, se A é aberto e B é fechado, então $A \setminus B$ é aberto e $B \setminus A$ é fechado.