Lista 3 - Operações e Propriedades de Conjuntos e Funções

Exercício 1. Prove ou de um contra-exemplo para as seguintes afirmações onde A, B, C são conjuntos arbitrários:

(a) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ e $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

(b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(c) $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$.

(d) $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.

(e) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.

(f) $(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$.

(g) $(A \setminus B) \cup B = A$ se e somente se $B \subseteq A$.

Exercício 2. Seja $f : S \to T$ uma função. Dados subconjuntos arbitrários $A, B \subseteq S$, mostre que

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \quad \text{e} \quad f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$$

Exercício 3. Seja $f : S \to T$ uma função e suponha que $X, X_1, X_2 \subseteq S$ e $Y, Y_1, Y_2 \subseteq T$. Mostre que ou de um contra-exemplo para cada um dos seguintes itens:

(a) $X \subseteq f^{-1}[f(X)]$.

(b) $f([f^{-1}(Y)] \subseteq Y$.

(c) $f^{-1}[Y_1 \cup Y_2] = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$.

(d) $f^{-1}[Y_1 \cap Y_2] = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$.

(e) $f^{-1}(T \setminus Y) = S \setminus f^{-1}(Y)$.

Exercício 4. Seja $f : S \to T$ uma função. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) f é injetora,

(b) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$, para todo $A, B \subseteq S$.

(c) $f^{-1}[f(A)] = A$ para todo $A \subseteq S$.

(d) Se $A, B \subseteq S$ são subconjuntos disjuntos, então $f(A)$ e $f(B)$ são também disjuntos.

(e) Para todo subconjunto A e B de S com $B \subseteq A$, tem-se $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$.

Exercício 5. Mostre que, se S é um conjunto infinito, então S contém um subconjunto infinito enumerável.

Exercício 6. Prove que tod conjunto infinito S contém um subconjunto próprio equivalente a S.

Exercício 7. Um número real é dito *algébrico* se é a raiz de uma equação algébrica $f(x) = 0$, onde $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ é um polinômio com coeficientes inteiros. Mostre que o conjunto de todos os polinômios com coeficientes inteiros é enumerável. Use esse fato para concluir que o conjunto de todos os número algébricos é no máximo enumerável.

Exercício 8. Seja S um conjunto com n elementos e seja T a família de todos os subconjuntos de S. Mostre que T é um conjunto finito e encontre o número de elementos de T.

Exercício 9. Seja S a família de todas as sequencias cujos termos são os inteiros 0 e 1. Mostre que S é não-enumerável.

Exercício 10. Seja S a coleção de todos os subconjuntos de um dado conjunto T. Seja $f : S \to \mathbb{R}$ uma função definida em S. A função f é dita *aditiva* se $f(A \cup B) = f(A) + f(B)$, sempre que A e B forem subconjuntos disjuntos de T. Mostre que, se f é aditiva, então as seguintes equações valem para todos subconjuntos $A, B \subseteq T$:

$$f(A \cup B) = f(A) + f(B \setminus A) \quad \text{e} \quad f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B).$$