

Lista 2 - Números Reais, Decimais e Valor Absoluto

Exercício 1. Dados números reais a e b tais que $a \leq b + \epsilon$, para todo $\epsilon > 0$, então $a \leq b$.

Exercício 2 (Propriedade de Aproximação). Seja $S \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto não-vazio com supremo, digamos $s = \sup S$. Mostre que, para todo $a < s$, existe $x \in S$ tal que $a < x \leq s$.

Exercício 3 (Propriedade Aditiva). Dados subconjuntos não-vazios $A, B \subseteq \mathbb{R}$, defina o conjunto

$$C = \{x + y : x \in A \text{ e } y \in B\}.$$

Mostre que, se ambos A e B admitem supremo, então C também admite supremo e

$$\sup C = \sup A + \sup B.$$

Exercício 4. Verifique a seguinte equação para todo $a, b \in \mathbb{R}$ e todo inteiro positivo n :

$$b^n - a^n = (b - a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + \dots + a^{n-1}).$$

Decimais

Definição 1 (Representação Decimal Finita). Um número real da forma

$$r_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n}, \quad (1)$$

onde a_0 é um inteiro e a_1, \dots, a_n são inteiros tais que $0 \leq a_i \leq 9$ é geralmente escrito na forma:

$$r_n = a_0.a_1a_2 \dots a_n,$$

chamada representação decimal finita de r_n .

Exercício 5. Mostre que, se um número r_n é dado por uma decimal finita (1), então $r_n \in \mathbb{Q}$. Mostre também que a recíproca é falsa.

Exercício 6. Considere um número real $x > 0$. Mostre que, para todo inteiro $n \geq 1$, existe um decimal finito $r_n = a_0.a_1 \dots a_n$ tal que

$$r_n \leq x < r_n + \frac{1}{10^n}. \quad (2)$$

Definição 2 (Representação Decimal Infinita). A representação infinita de um número real $r \in \mathbb{R}$, denotada por $r = a_0.a_1a_2a_3 \dots$, é definida como o supremo do conjunto $\{r_1, r_2, \dots\}$, onde cada r_n satisfaz (2) para $n = 1, 2, \dots$

Exercício 7. Encontre o número racional cuja representação decimal é $0.3344444 \dots$

Valor Absoluto

Definição 3 (Valor Absoluto). Dado $x \in \mathbb{R}$, o valor absoluto de x , denotado por $|x|$, é definido como segue:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0, \\ -x, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Exercício 8. Mostre que, para todo $a \geq 0$, a inequação $|x| \leq a$ se, e somente se, $-a \leq x \leq a$.

Exercício 9 (Desigualdade Triangular). Mostre que a seguinte desigualdade vale par todo $x, y \in \mathbb{R}$:

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$