Lista 10 - Resolução de Alguns Exercícios

Exercício 1 (Exercício 18, Lista 10)**.** Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos e $f : X \to Y$. Mostre que f é contínua em X se, e somente se, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ para todo $A \subseteq X$.

Demonstração. $\Rightarrow$) Vamos mostrar primeiro que se f é contínua em X, então $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ para todo $A \subseteq X$.

Seja $A \subseteq X$ e suponha que $y \in f(\overline{A})$, ou seja, existe $x \in \overline{A}$ tal que $f(x) = y$. Pela definição de fecho, existe uma sequência $\{x_n\} \in A$ tal que $x_n \to x$. Além disso, como f é contínua em X, temos que a sequência $\{f(x_n)\} \subseteq f(A)$ converge para $y = f(x) \in f(\overline{A})$. Dessa forma, temos que $y \in \overline{f(A)}$. Como A e $y \in f(\overline{A})$ foram escolhidos de forma arbitrária, temos que $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ para todo $A \subseteq X$.

$\Leftarrow$) Vamos mostrar agora a reciproca, ou seja, se $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ para todo $A \subseteq X$, então f é contínua em X. Precisamente, vamos demonstrar a contra-positiva: Se f é não é contínua em X, então existe $A \subseteq X$ tal que $f(\overline{A})$ não está contido em $\overline{f(A)}$.

De fato, suponha que f não é contínua em um ponto $x \in X$. Dessa forma, existe uma sequência $\{x_n\} \subseteq X$ que converge para x, com $x_n \neq x$ para todo n, tal que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(x)$. Seja $A = \{x_n\}$ o conjunto de todos os pontos dessa sequência. Por um lado, temos que $x \in \overline{A}$ e, portanto, $f(x) \in f(\overline{A})$. Por outro lado, como f não é contínua em x, temos que $\{f(x_n)\} \in f(A)$ é uma sequência tal que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(x)$. Logo, $f(x) \notin \overline{f(A)}$. Dessa forma, mostramos que existe um conjunto $A \subseteq X$ tal que $f(x) \in f(\overline{A})$, mas $f(x) \notin \overline{f(A)}$, ou seja, $f(\overline{A})$ não está contido em $\overline{f(A)}$.

$\square$