Lista 10 - Limites e Funções Contínuas

Exercício 1. Seja (X, d_X) um espaço métrico. Suponha que $E \subseteq X$ e $p \in X$ é um ponto de acumulação de E (ponto limite). Considere funções $f, g : E \to \mathbb{R}$ tais que

$$\lim_{x\to p} f(x) = A \quad \text{e} \quad \lim_{x\to p} g(x) = B.$$

Mostre que,

$$\text{a)} \quad \lim_{x\to p}(f+g)(x) = A + B, \tag{1}$$

$$\text{b)} \quad \lim_{x\to p}(fg)(x) = AB, \tag{2}$$

$$\text{c)} \quad \lim_{x\to p}(f/g)(x) = A/B, \quad \text{se } B \neq 0. \tag{3}$$

Exercício 2. Investigue o comportamento da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} 6 & \text{se } x = 1, \\ \frac{x^2-1}{x-1} & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

quando $x \to 1$. Justifique sua resposta demonstrando (e determinando) a existência do limite $\lim_{x\to 1} f(x)$.

Exercício 3. Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(x) = \frac{|x|}{x}.$$

O limite $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe? Justifique sua resposta.

Exercício 4. Defina $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ como $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$. Investigue o comportamento de f para x é próximo 0. Em outras palavras, mostre se o limite $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe ou não. Faça a mesma análise para a função $g : (0,1) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1/x$.

Exercício 5. Sejam (a, b) um intervalo aberto em $\mathbb{R}$, $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e $x \in (a, b)$. Considere as seguintes afirmações:

$$\text{a)} \quad \lim_{h\to 0} |f(x+h) - f(x)| = 0, \tag{4}$$

$$\text{b)} \quad \lim_{h\to 0} |f(x+h) - f(x-h)| = 0. \tag{5}$$

Mostre que $a)$ sempre implica $b)$ e dê um exemplo na qual $b)$ vale mas $a)$ não é válido.

Exercício 6. Sejam (X, d_X), (Y, d_Y) e (Z, d_Z) espaços métricos. Suponha que $E \subseteq X$, $f : E \to Y$, $g : f(E) \to Z$ e defina $h : E \to Z$ como $h(x) = g(f(x))$ para todo $x \in E$. Mostre que, se f é contínua num ponto $p \in E$ e se g é contínua no ponto $f(p)$, então h é contínua em p.

Exercício 7. Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos. Mostre que uma função $f : X \to Y$ é contínua se e somente se $f^{-1}(C)$ é um subconjunto fechado em X para todo subconjunto C fechado em Y.

Exercício 8. Sejam (X, d) um espaço métrico e $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções contínuas. Mostre que $f + g$, gf são também funções contínuas em X. Mostre também que, se $g(x) \neq 0$ para todo $x \in X$, então f/g também é uma função contínua de X em $\mathbb{R}$.

Exercício 9. Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos. Suponha que $f : X \to Y$ é uma bijeção de modo que a inversa f^{-1} exista. Mostre que, se X é compacto e f é contínua em X, então f^{-1} é uma função contínua em Y.

Exercício 10. Mostre que a função constante e a função identidade em $\mathbb{R}$ são ambas funções contínuas. Em outras palavras, dados $c \in \mathbb{R}$ e $X \subseteq \mathbb{R}$, mostre que a função $f : X \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = c$ para todo $x \in X$ é uma função contínua em X. Mostre também que a função $g : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x$ para todo $x \in X$ é contínua em X.

Exercício 11. Mostre que todo polinômio em $\mathbb{R}$ é uma função contínua. Em outras palavras, dados $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ e $X \subseteq \mathbb{R}$, mostre que a função polinômial $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ é contínua em X.

Exercício 12. Prove ou dê um contra-exemplo. A imagem de um conjunto aberto por uma aplicação contínua é um conjunto aberto. Em outras palavras, sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos. Se $f : X \to Y$ é uma função contínua e $A \subseteq X$ é um conjunto aberto em X, então $f(A)$ é um conjunto aberto em Y?

Exercício 13. Seja $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(x) = 0$ se x é racional. Mostre que $f(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$.

Exercício 14. Sejam $f, g, h : [0, 1] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções definidas como segue:

$$\begin{aligned}
&\text{a)} \quad f(x) = g(x) = h(x) = 0, && \text{se } x \text{ for um número irracional,} && (6)\\
&\text{b)} \quad f(x) = 1 \;\text{ e }\; g(x) = 0, && \text{se } x \text{ for um número racional,} && (7)\\
&\text{c)} \quad h(x) = 1/n, && \text{se } x = m/n \text{ for um racional (sem fator comum),} && (8)\\
&\text{d)} \quad h(x) = 0, && \text{se } x = 0. && (9)
\end{aligned}$$

Mostre que f não é contínua em nenhum ponto de $[0, 1]$, g é contínua somente no ponto $x = 0$, e h é contínua apenas nos pontos irracionais de $[0, 1]$.

Exercício 15. Considere a seguinte função definida no intervalo $[0, 1] \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \text{ é um racional,} \\ 1 - x & \text{se } x \text{ é um irracional.} \end{cases}$$

Mostre que:

a) $f(f(x)) = x$ para todo $x \in [0, 1]$,

b) $f(x) + f(1 - x) = 1$ para todo $x \in [0, 1]$,

c) f é contínua somente no ponto $x = 1/2$,

d) f assume qualquer valor entre 0 e 1,

e) $f(x + y) - f(x) - f(y)$ é racional para todo $x, y \in [0, 1]$.

Exercício 16. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e suponha que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ na qual a função f é contínua. Suponha também que, para todo $x, y \in \mathbb{R}$, f satisfaz a equação $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Mostre que existe uma constante $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exercício 17. Seja $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e defina $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ como segue: $g(a) = f(a)$ e, para $a < x \leq b$, tome $g(x)$ como sendo o máximo de f no sub-intervalo $[a, x]$. Mostre que g é uma função contínua em $[a, b]$.

Exercício 18. Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos e $f : X \to Y$. Mostre que f é contínua em X se, e somente se, $f^{-1}(\text{int } B) \subseteq \text{int } f^{-1}(B)$ para todo $B \in Y$. Mostre também que f é contínua em X se, e somente se, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ para todo $A \subseteq X$.