Lista de Exercícios - Funções Trigonométricas

Algumas Identidades Trigonométricas:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \text{e} \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

Exercício 1. Determine o período e esboce o gráfico das seguintes funções:

(a) $f(x) = 4\cos(x)$.

(b) $f(x) = 2 - \operatorname{sen}(x)$.

(c) $f(x) = 3\cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

(d) $f(x) = 5 + \cos(x)$.

(e) $f(x) = 2\operatorname{tg}(x)$.

(f) $f(x) = 3\cos\left(x - \frac{\pi}{3})\right)$.

(g) $f(x) = \cos(x) + \operatorname{sen}(x)$.

Exercício 2. Dados $\operatorname{sen} x = -3/4$ e $\cos x = -\sqrt{7}4$, com $\pi < x < 3\pi/2$, calcule $\operatorname{tg}(x)$.

Exercício 3. Determine o valor de k de modo que se verifiquem as seguintes equações:

(a) $\operatorname{sen}(x) = \frac{2k-1}{3}$.

(b) $\cos(x) = \frac{4k+1}{2}$.

Exercício 4. Determine o período da função: $f(x) = \operatorname{tg}(x - \pi/4)$.

Exercício 5. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Se $x + y = \pi/2$ e $x - y = \pi/6$, calcule o valor de t, sendo

$$t = \frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y}{\cos x - \cos y}.$$

Exercício 6. Determine o valor da expressão:

$$y = \cos\left(-\frac{9\pi}{2}\right) - 3\operatorname{tg} 3\pi + \operatorname{sen}\left(-\frac{5\pi}{2}\right).$$

Exercício 7. Dado $\operatorname{sen} x = \sqrt{a-2}$ e $\cos x = a - 1$, determine a.

Exercício 8. Quais são os valores de a para que se tenha, simultaneamente, $\operatorname{sen} x = a$ e $\cos x = a\sqrt{3}$.

Exercício 9. Demonstre as seguintes identidades trigonométricas:

(a) $\operatorname{sen} x \operatorname{cosec} x = 1$.

(b) $\cos x \operatorname{tg} x = \operatorname{sen} x$.

(c) $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = \operatorname{tg} x \operatorname{cosec}^2 x$.

(d) $(1 - \operatorname{tg}^2 x)(1 - \operatorname{sen}^2 x) = 1$.

(e) $1 + \operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg}^2 x \operatorname{cosec}^2 x$.

(f) $\dfrac{\cos x}{\sec x} + \dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cosec} x} = 1.$

(g) $\operatorname{tg}^2 x + \cos^2 x = \sec^2 x - \operatorname{sen}^2 x.$

(h) $\operatorname{cotg}^2 x + 1 = \operatorname{cosec}^2 x.$

(i) $\operatorname{tg} x \operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen}^2 x.$

(j) $\operatorname{sen} 2x \operatorname{cotg} x = \cos 2x + 1.$

(k) $1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x = \sec 2x.$

Exercício 10. Sabendo que

$$\cos^2 x = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 1} \quad \text{e} \quad \cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x,$$

expresse $\operatorname{sen} x$ em função de $\operatorname{tg} x$.

Exercício 11. Mostre que a seguinte equação é válida para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$(\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x)(\cos x + \operatorname{cotg} x) = (1 - \operatorname{sen} x)(1 + \cos x).$$

Exercício 12. Calcule $\operatorname{sen} 2x$, sabendo que $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = 3$.

Exercício 13. Sabendo que $\operatorname{tg} 2t = 1$, determine $\operatorname{tg} t$.

Exercício 14. Resolva as seguintes equações trigonométricas:

(a) $\operatorname{tg} 3x = 1.$

(b) $\operatorname{tg} 2x = -1.$

(c) $\operatorname{cosec} 2x = -\sqrt{2}.$

(d) $\sec 2x = 2.$

(e) $2 \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen} x.$

(f) $2 \operatorname{sen}^2 x + \cos x = 1.$

(g) $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen} x.$

(h) $\cos 2x - \cos^2 x = 0.$

(i) $2 \operatorname{sen} x \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

(j) $\operatorname{sen} 5x = \operatorname{sen} 2x.$

(k) $\cos x = \cos(5\pi/2 - 2x).$

(l) $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{cotg} 3x.$

(m) $\operatorname{sen}(x - 2\pi/3) = \cos 2x.$

(n) $\operatorname{tg}(x + \pi/3) + \operatorname{cotg}(\pi/2 - 3x) = 0.$

(o) $\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 6x = 2 \operatorname{sen} 4x.$

(p) $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{sen} 6x.$

(q) $2\cos^2 x + \cos 5x - 1 = 0.$

(r) $\operatorname{sen}(x + \pi/6) + \cos(x + \pi/3) = 1 + \cos 2x.$

(s) $\operatorname{tg}(\pi/4 + x) = 1 + \operatorname{sen} 2x$.

(t) $\operatorname{sen}(\pi/4 + 3x/2) = 2 \operatorname{sen}(\pi/4 - x/2)$.

Exercício 15. Resolva as seguintes inequações trigonométricas no intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$:

(a) $\operatorname{sen} x \geq -1/2$.

(b) $\cos x \leq 1/2$.

(c) $\operatorname{tg} x > 1$.

(d) $\cos x > \sqrt{3}/2$.

(e) $\operatorname{sen} x \geq -\sqrt{2}/2$.

(f) $\operatorname{tg} x < 1$.

(g) $\cos x > -1$.

(h) $\cos x < \sqrt{2}/2$.

(i) $\operatorname{sen}^2 x \leq 1 - \cos x$.

(j) $\operatorname{sen} 2x + \cos 2x \leq 1$.

(k) $\operatorname{sen} 2x > \cos x$.