Lista 9 - Produto Vetorial e suas Aplicações

Exercício 1. Calcule o produto vetorial $u \times v$ para:

a) $u = (5, 4, 3)$ e $v = (1, 0, 1)$;

b) $u = (3, 1, 2)$ e $v = (-2, 2, 5)$;

c) $u = (1, -1, 1)$ e $v = (2, -3, 4)$;

d) $u = (1, -2, -2)$ e $v = (2, 0, -1)$;

e) $u = (2, 1, -1)$ e $v = (1, -1, 3)$.

Exercício 2. Se $u = (3, -1, -2)$, $v = (2, 4, -1)$ e $w = (-1, 0, 1)$, determine:

a) $|u \times v|$;

b) $(2v) \times (3v)$;

c) $(u \times w) + (w \times u)$;

d) $(u \times v) \times (v \times u)$;

e) $(u - v) \times w$;

f) $(u \times v) \times w$;

g) $u \times (v \times w)$;

h) $u \times (v + w)$;

i) $u \times v + u \times w$;

j) $\langle u \times v, v \rangle$;

k) $\langle u \times v, w \rangle$;

l) $\langle u, v \times w \rangle$.

Exercício 3. Determine o vetor $w \in \mathbb{R}^3$ tal que w seja ortogonal ao eixo y e $u = w \times v$, onde $u = (1, 1, -1)$ e $v = (2, -1, 1)$.

Exercício 4. Determine um vetor que seja ortogonal a ambos $u = (1, -1, 4)$ e $v = (3, 2, -2)$.

Exercício 5. Calcule a área do paralelogramo definido pelos vetores $u = (1, -1, 1)$ e $v = (2, -3, 4)$. Calcule também a altura relativa a base definida pelo vetor u.

Exercício 6. Determine a distância do ponto $P(5, 1, 2)$ a reta r que passa pelos pontos $A(3, 1, 3)$ e $B(4, -1, 1)$.

Exercício 7. Determine o valor de a para que a área do paralelogramo determinado por $u = (2, 1, -1)$ e $v = (1, -1, a)$ seja $\sqrt{62}$.

Exercício 8. Dados os pontos $A(2, 1, 1)$, $B(3, -1, 0)$ e $C(4, 2, -2)$, determine a área do triangulo ABC e a altura relativa ao vértice C.

Exercício 9. Encontre um vetor ortogonal ao plano determinado pelos pontos P, Q e R:

a) $P(3, 0, 0)$, $Q(0, 3, 0)$ e $R(0, 0, 2)$;

b) $P(2, 3, 0)$, $Q(0, 2, 1)$ e $R(2, 0, 2)$.

Exercício 10. Determine z sabendo que $A(2,0,0)$, $B(0,2,0)$ e $C(0,0,z)$ são vértices de um triângulo de área 6.

Definição 1. *Três vetores u, v e w são co-planares, ou seja, pertencem ao mesmo plano, se, e somente se, vale a equação $\langle u, v \times w \rangle = 0$.*

Exercício 11. Verifique que os vetores $u = (2,-1,1)$, $v = (1,0,-1)$ e $w = (2,-1,4)$ são co-planares.

Exercício 12. Qual deve ser o valor de m para que os vetores $u = (2,m,0)$, $v = (1,-1,2)$ e $w = (-1,3,-1)$ sejam co-planares?

Exercício 13. Verifique que os pontos $A(1,2,4)$, $B(-1,0,2)$, $C(0,2,2)$ e $D(-2,1,3)$ estão no mesmo plano.

Exercício 14. Qual o volume do cubo determinado pelos vetores $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$?

Exercício 15. Determine o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $u = (3,-1,4)$, $v = (2,0,1)$ e $w = (-2,1,5)$.

Exercício 16. Calcule o valor de m para que o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $v_1 = (0,-1,2)$, $v_2 = (-4,2,-1)$ e $v_3 = (3,m,-2)$ seja 33.

RESPOSTAS

Ex. 1: a) $(4, -2, -4)$, b) $(1, -19, 8)$, c) $(-1, -2, -1)$, d) $(2, -3, 4)$, e) $(2, -7, -3)$.
Ex. 2: a) 0, b) $(0, 0, 0)$, c) $(0, 0, 0)$, d) $(0, 0, 0)$, e) $(-5, 0, -5)$, f) $(-1, -23, -1)$, g) $(-6, -20, 1)$, h) $(8, -2, 13)$, i) $(8, -2, 13)$, j) 0, k) 5, l) 5.
Ex. 3: $w = (1, 0, 1)$.
Ex. 4: $(10, -10, 5)$ ou qualquer múltiplo desse vetor.
Ex. 5: $A = \sqrt{6}$ u.a., $h = \sqrt{2}$ u.c.
Ex. 6: Distância: $\dfrac{\sqrt{29}}{3}$ u.c.
Ex. 7: $a = 3$ ou $a = \dfrac{-17}{5}$.
Ex. 8: $A = \dfrac{5}{2}\sqrt{3}$ u.a. e $h = \dfrac{5}{2}\sqrt{2}$ u.c.
Ex. 9: a) $(2, 2, 3)$, b) $(1, 4, 6)$.
Ex. 10: 4 ou -4.
Ex. 12: $m = -10$.
Ex. 14: $V = 1$.
Ex. 15: $V = 17$.
Ex. 16: $m = 4$ ou $m = -\dfrac{17}{4}$.