Lista 8 - Ângulo, Vetores Perpendiculares e a Equação do Plano no Espaço

Exercício 1. Calcule o ângulo entre os vetores:

a) $u = (1, 1, 4)$ e $v = (-1, 2, 2)$;

b) $u = (2, -1, -1)$ e $v = (-1, -1, 2)$;

c) $u = (1, -2, 1)$ e $v = (-1, 1, 0)$.

Exercício 2. Considere o triângulo de vértices $A(3, 4, 4)$, $B(2, -3, 4)$ e $C(6, 0, 4)$. Determine o ângulo interno do vértice B.

Exercício 3. Calcule o coseno dos ângulos internos do triângulo de vértices $A(2, 1, 3)$, $B(1, 0, -1)$ e $C(-1, 2, 1)$.

Exercício 4. Mostre que os vetores $u = (7, -3, 6)$, $v = (3, 3 - 2)$ e $w = (6, -16, -15)$ são mutuamente ortogonais.

Exercício 5. Sabe-se que o vetor não-nulo $u = (x, y, z)$ possui coordenadas inteiras, ou seja, $x, y, z \in \mathbb{Z}$. Determine valores de x, y e z considerando que u é ortogonal a ambos vetores $(4, 1, 1)$ e $(2, -3, 4)$.

Exercício 6. Seja θ o ângulo entre os vetores $u = (x, y, z)$ e $v = (a, b, c)$. Use a relação $\operatorname{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ para mostrar que

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{(bz - cy)^2 + (cx - az)^2 + (ay - bx)^2}}{\|u\|\|v\|}. \tag{1}$$

Exercício 7. Determine a equação cartesiana do plano que passa pelo ponto $A(2, -1, 3)$ e tem $v = (3, 2, -4)$ como vetor normal.

Exercício 8. Determine a equação cartesiana do plano que intercepta os eixos coordenados nos pontos $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ e $(0, 0, c)$, com $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c \neq 0$.

Exercício 9. A reta

$$\begin{cases} x = 5 + 3t, \\ y = -4 + 2t, \\ z = 1 + t, \end{cases} \tag{2}$$

é ortogonal ao plano que passa pelo ponto $A(2, 1, 2)$. Determine a equação cartesiana do plano.

Exercício 10. Encontre as equações paramétricas da reta dada pela interseção dos planos:

a) $x + y + z = 0$ e $2x - y + z = 0$;

b) $5x - y + z - 5 = 0$ e $x + y + 2z - 7 = 0$;

c) $3x - y + 2z - 1 = 0$ e $x + 2y - 3z - 4 = 0$;

d) $3x - 2y - z - 1 = 0$ e $x + 2y - z - 7 = 0$;

e) $2x + y - 4 = 0$ e $z = 5$.

RESPOSTAS

Ex. 1: a) $\theta = 45^{\text{o}}$, b) $\theta = 120^{\text{o}}$, c) $\theta = 150^{\text{o}}$.
Ex. 2: 45°
Ex. 3: Vértice A: $\dfrac{10}{\sqrt{252}}$, Vértice B: $\dfrac{8}{\sqrt{216}}$, Vértice C: $\dfrac{4}{\sqrt{168}}$.
Ex. 4: Verifique que $\langle u, v\rangle = \langle u, w\rangle = \langle v, w\rangle = 0$.
Ex. 5: $u = (1, -18, -14)$.
Ex. 6: Use a relação $\langle u, v\rangle = \|u\|\|v\| \cos\theta$.
Ex. 7: $3x + 2y - 4z + 8 = 0$.
Ex. 8: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$.
Ex. 9: $3x + 2y + z - 6 = 0$.
Ex. 10:

a) $x = t;\ y = \dfrac{t}{2};\ z = -3t$.

b) $x = t;\ y = -1 + 3t;\ z = 4 - 2t$.

c) $x = t;\ y = 11 - 11t;\ z = 6 - 7t$.

d) $x = t;\ y = \dfrac{-3}{2} + \dfrac{t}{2};\ z = -4 + 2t$.

e) $x = t;\ y = 4 - 2t;\ z = 5$.