Lista 3 - Projeções e Ângulos entre Vetores

Definição 1 (Projeção Ortogonal). *Dados dois vetores $u, v \in \mathbb{R}^2$, a projeção ortogonal de u na reta que que contém o vetor v é*

$$proj_v u = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v. \tag{1}$$

Definição 2 (Ângulo entre Vetores). *O ângulo θ entre dois vetores não-nulos $u, v \in \mathbb{R}^2$ é aquele entre 0 e π que satisfaz*

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|\|v\|}. \tag{2}$$

Exercício 1. Determine a projeção ortogonal $\text{proj}_v u$, esboçe os vetores e calcule o ângulo entre u e v nos seguintes casos:

a) $u = (1, 1)$ e $v = (1, 0)$;

b) $u = (1, 0)$ e $v = (1, 1)$;

c) $u = (1, 1)$ e $v = (-1, 1)$;

d) $u = (1, 1)$ e $v = (-1, -1)$;

e) $u = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ e $v = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$;

f) $u = (2, 1)$ e $v = (1, 3)$;

g) $u = (3, 4)$ e $v = (-1, -1)$.

Exercício 2. Considere o vetor $v = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$. Mostre que, para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, a projeção do vetor $u = (\frac{\sqrt{2}}{2} - \lambda, \frac{\sqrt{2}}{2} + \lambda)$ na direção de v é $\text{proj}_v u = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Esboçe no plano os vetores u, v e $\text{proj}_v u$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercício 3. Dado o vetor $v = (-1, 3) \in \mathbb{R}^2$, mostre que $\text{proj}_v u = (\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$ se $u = (\frac{1}{2} + 3\lambda, -\frac{3}{2} + \lambda)$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercício 4. Dado o vetor $v = (2, -4) \in \mathbb{R}^2$, encontre vetores $u, w \in \mathbb{R}^2$, que pertencem respectivamente aos eixos x e y, tais que $\text{proj}_v u = \text{proj}_v w = (-1, 2)$.

Exercício 5. Dado $v = (-2, -2)$, encontre todos os vetores $u \in \mathbb{R}^2$ tais que $\text{proj}_v u = (1, 1)$.

Exercício 6. Dado $v = (1, -2)$, encontre todos os vetores $u \in \mathbb{R}^2$ tais que $\text{proj}_v u = (2, -4)$.

Exercício 7. Dado o vetor $v = (2, 1)$, existe um vetor $u \in \mathbb{R}^2$ tal que $\text{proj}_v u = (1, 2)$. Justifique sua resposta.

Exercício 8. Verifique que, para todo $\lambda > 0$, os vetores $u = (\lambda\sqrt{3}, \lambda)$ e $v = (1, 1)$ formam um ângulo de 15°. Verifique que os vetores v e $w = (\lambda, \lambda\sqrt{3})$ também formam um ângulo de 15°.

Exercício 9. Dados os vetores $u = (1, 0)$, $v = (1, 3)$ e $w = (0, \sqrt{2})$, mostre que os ângulos entre u e v e o ângulo entre v e w somam 90°.

Exercício 10. Mostre que, para todo $\lambda > 0$, o vetor $v = (-\sqrt{3}, 3)$ forma um ângulo de 30° com ambos vetores $u = (0, \lambda)$ e $w = (\lambda\sqrt{3}, \lambda)$.

Exercício 11. Suponha que dois vetores $u, v \in \mathbb{R}^2$ formem um ângulo θ. Mostre que os vetores αu e βv também formam um ângulo θ para todo $\alpha > 0$ e $\beta > 0$. Qual será o ângulo entre αu e βv se ambos α e β forem negativos. O que acontece se α ou β, mas não ambos, for negativo.

Exercício 12. Encontre os dois vetores unitários que formam com o vetor $v = (1, 1)$ um ângulo cujo cosseno é $1/2$. Analogamente, encontre os dois vetores unitários que formam com v um ângulo cujo cosseno é $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.