Lista 2 - Translações, Norma e Algumas Desigualdades Fundamentais

Definição 1. *O produto escalar de dois vetores $u = (a, b)$ e $v = (x, y)$ em $\mathbb{R}^2$ é definido através da equação*

$$\langle u, v\rangle = ax + by. \tag{1}$$

Exercício 1. Use a definição do produto escalar para mostrar que as seguintes propriedades propriedades são válidas para quaisquer vetores u, v e w em $\mathbb{R}^2$ e para qualquer escalar $\lambda \in \mathbb{R}^2$:

a) Aditiva: $\langle u + w, v\rangle = \langle u, v\rangle + \langle w, v\rangle$;

b) Homogênea: $\langle \lambda u, v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle$;

c) Simétrica: $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$;

d) Definida: $\langle u, u\rangle = 0$ se, e somente se u é o vetor nulo, i.e., $u = (0, 0)$.

Definição 2. *Dois vetores u e v em $\mathbb{R}^2$ são ortogonais se, e somente se, $\langle u, v\rangle = 0$.*

Exercício 2. Verifique se os seguintes vetores são ortogonais:

a) $u = (3, 4)$ e $v = (1, -13)$;

b) $u = (-1, 1)$ e $v = (4, -4)$;

c) $u = (-3, -6)$ e $v = (2, -1)$;

Exercício 3. Dado o vetor $u = (1, 1)$, mostre que qualquer vetor do conjunto $A = \{v \in \mathbb{R}^2 : v = (-\lambda, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$ é ortogonal a u. Verifique que o conjunto A corresponde a reta que passa pela origem e pelo ponto $(-1, 1)$.

Exercício 4. Dado o vetor $u = (1, -3)$, determine o conjunto de todos os vetores do plano $\mathbb{R}^2$ que são ortogonais a u. Esboçe no plano esse conjunto juntamente com o vetor u.

Exercício 5. Dado um vetor $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, mostre que $v = (-\lambda y, \lambda x)$, para $\lambda \in \mathbb{R}$, é ortogonal a u.

Definição 3. *Fixado um vetor $v_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, definimos a translação τ segundo v_0 como segue para todo $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$:*

$$\tau(u) = u + v_0. \tag{2}$$

Exercício 6. Determine e esboçe a translação dos seguintes conjuntos:

a) Do triangulo com vértices $(2, -1)$, $(0, 4)$ e $(5, 1)$ segundo o vetor $v_0 = (-2, 1)$;

b) Do triangulo com vértices $(2, -3)$, $(4, 4)$ e $(-2, 3)$ segundo o vetor $v_0 = (2, 2)$;

c) Do gráfico da função $f(x) = 3x + 1$ segundo o vetor $v_0 = (1, 0)$;

d) Do conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) = \lambda(3, -1), \lambda \in \mathbb{R}\}$ segundo o vetor $v_0 = (-1, 1)$;

Definição 4. *A norma de um vetor $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ é definida como segue:*

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle} = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{3}$$

Um vetor $u \in \mathbb{R}^2$ é dito unitário se $\|u\| = 1$. A distância entre dois vetores $u, v \in \mathbb{R}^2$ é definida como

$$d(u, v) = \|u - v\|. \tag{4}$$

Exercício 7. Verifique se os seguintes vetores são unitários:

1. $u = (-1, 0)$;
2. $u = (1, -3)$;
3. $u = (3/5, 4/5)$;
4. $u = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

Exercício 8. Dado um angulo θ qualquer, verifique que $u = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ é um vetor unitário.

Exercício 9. Seja $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ um vetor unitário qualquer. Verifique que existe um angulo θ tal que $x = \cos\theta$ e $y = \operatorname{sen}\theta$.

Exercício 10. Esboçe no plano o conjunto de todos os vetores unitários.

Exercício 11. Dado um vetor qualquer $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, mostre que $v = u/\|u\|$ é um vetor unitário. Interprete essa afirmação geometricamente.

Propositição 5 (Desigualdade de Schwarz)**.** *Para u e v em $\mathbb{R}^2$, vale a desigualdade:*

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|. \tag{5}$$

Exercício 12. Verifique que a desigualdade de Schwarz considerando os seguintes pares de vetores:

a) $u = (6, 7)$ e $v = (2, -4)$;

b) $u = (-1, 6)$ e $v = (5, 0)$;

c) $u = (1, -1)$ e $v = (9, -5)$;

d) $u = (-1/5, 1/2)$ e $v = (-9, 1/3)$;

Exercício 13. Verifique as seguintes propriedades da norma de vetores:

a) $\|v\| \geq 0$, para todo vetor $v \in \mathbb{R}^2$;

b) $\|v\| = 0$ se, e somente se, $v = 0$;

c) $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$ para todo $v \in \mathbb{R}^2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$;

d) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ para todo $u, v \in \mathbb{R}^2$.

Exercício 14. Verifique as seguintes propriedades da distância $d(u, v) = \|u - v\|$:

a) $d(u, v) \geq 0$, para todo vetor $v, v \in \mathbb{R}^2$;

b) $d(u, v) = 0$ se, e somente se, $u = v$;

c) Simetria: $d(u, v) = d(v, u)$;

d) Desigualdade Triangular: $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$, para todo $u, v, w \in \mathbb{R}^2$.

Definição 6. *Uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que associa um vetor a outro do plano é uma isometria se, e somente se,*

$$d\big(f(u), f(v)\big) = d(u, v), \quad \forall\, u, v \in \mathbb{R}^2. \tag{6}$$

Em termos gerais, uma isometria não distorce o plano. Por isso, são também chamadas movimentos rígidos. Observe no Exercício 6 que as translações são isometrias.

Exercício 15. Dado um vetor fixo $v_0 = (x_0, y_0)$, mostre que a translação $\tau(u) = u + v_0$ é uma isometria do plano.