Lista 1 - Pontos, Vetores e Conjutos no Plano

Exercício 1. Desenhe no plano $\mathbb{R}^2$ os seguintes pontos: $(3,0)$, $(0,2)$, $(-3,-2)$, $(4,3)$, $(4,-3)$, $(-4,-3)$, $(5,0)$, $(0,-2)$, $(0,0)$ e $(-2,3)$.

Exercício 2. Desenhe no plano o pontos cujas coordenadas são dadas pelos seguintes pares ordenados: $(\frac{1}{2},\frac{3}{4})$, $(\frac{3}{5},\frac{5}{2})$, $(\frac{11}{3},-4)$, $(\frac{21}{4},\frac{7}{5})$, $(\sqrt{2},1)$, $(\sqrt{3},\sqrt{3})$ e $(\sqrt{5},-\sqrt{10})$.

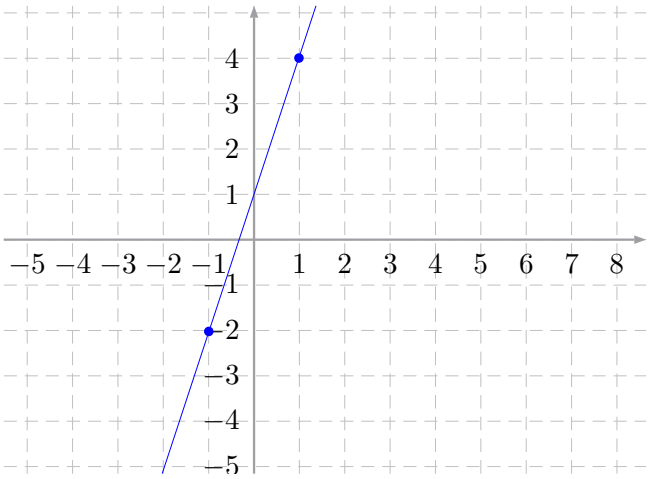
Exercício 3. Desenhe no plano os triangulos cujos vértices são:

a) $(2,-1)$, $(0,4)$ e $(5,1)$.

b) $(2,-3)$, $(4,4)$ e $(-2,3)$.

Definição 1 (Gráfico de uma função)**.** *Dada uma função real f na variável x, uma equação da forma $y = f(x)$ estabele uma relação entre os valores de x e y. O gráfico de f é o conjunto dos pares (x,y) do plano $\mathbb{R}^2$ que satisfazem essa relação. Em termos matemáticos, o gráfico de f é o conjunto $\mathcal{G} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$.*

Exercício 4. Verifique que o gráfico da função $f(x) = 3x+1$ é a reta que passa pelos pontos $(1,4)$ e $(-1,-2)$ apresentada na figura abaixo.



Exercício 5. Desenhe no plano $\mathbb{R}^2$ o gráfico das seguintes funções:

a) $f(x) = 3x + 2$, para $x \in \mathbb{R}$;

b) $f(x) = 3x - 2$, para $x \in \mathbb{R}$;

c) $f(x) = -3x - 2$, para $x \in \mathbb{R}$;

d) $f(x) = -3x + 2$, para $x \in \mathbb{R}$;

e) $f(x) = 6x + 2$, para $x \in \mathbb{R}$;

f) $f(x) = \frac{3}{2}x + 2$, para $x \in \mathbb{R}$;

g) $f(x) = 2$, para $x \in \mathbb{R}$.

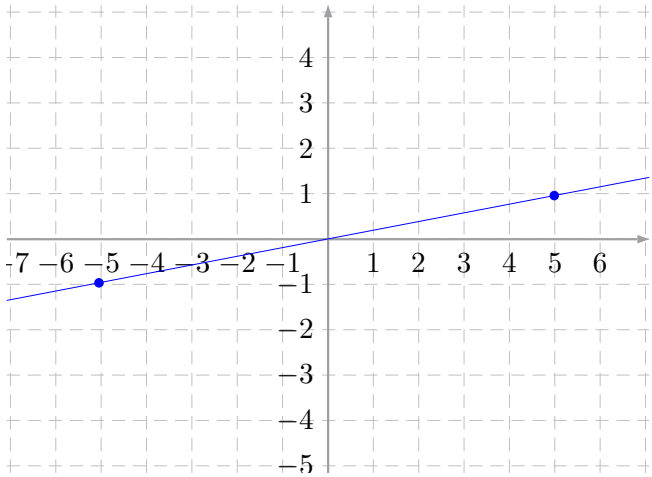
Exercício 6. Determine as coordenadas do ponto dado pela intersecção do gráfico das funções $f(x) = x+1$ e $g(x) = -3x + 2$.

Exercício 7. Determine a função cujo gráfico é a reta que passa pelos pontos:

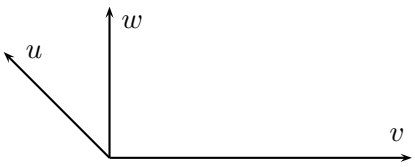
a) $(-3,2)$ e $(2,1)$;

b) $(-2,-1)$ e $(4,2)$.

Exercício 8. Determine a função f cujo gráfico é dado pela figura



Exercício 9. Considere os vetores u, v e w apresentados abaixo.



Esboçe os vetores dados por:

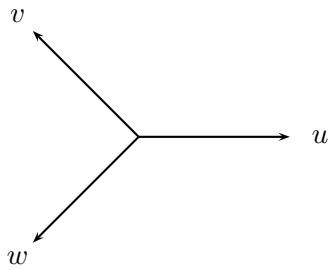
a) $u+v$;

b) $u-2v$;

c) $u+v+w$;

d) $\frac{1}{2}u-w$.

Exercício 10. Considere os vetores u, v e w apresentados abaixo.



Esboçe os vetores dados por:

a) $u-v$;

b) $u+v+w$;

c) $2u-\frac{1}{2}v$;

d) $u-(v-w)$.

Exercício 11. Sejam $u = (2, -7)$, $v = (1, 6)$ e $w = (\sqrt{3}, -\pi)$ vetores do plano. Calcule os seguintes vetores:

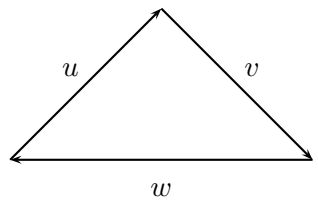
a) $u + 2v$;

b) $u + v - w$;

c) $3u - \frac{1}{\pi}w$;

d) $2u - 3v + (0, 32)$.

Exercício 12. Os vetores u, v e w formam os lados de um triangulo como mostrado na figura abaixo:



a) Expresse w em termos de u e v;

b) Expresse v em termos de w e u;

c) Expresse u em termos de w e v.

Exercício 13. Dado um vetor $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, verifique que ele pode ser escrito como $u = x(1, 0) + y(0, 1)$. Nesse caso, dizemos que u é escrito como uma *combinação linear* dos vetores $(1, 0)$ e $(0, 1)$.

Exercício 14. Determine escalares α e β tais que $(1, 2) = \alpha(1, 1) + \beta(-1, 1)$. Nesse caso, dizemos que $(1, 2)$ representa uma combinação linear dos vetores $(1, 1)$ e $(-1, 1)$.

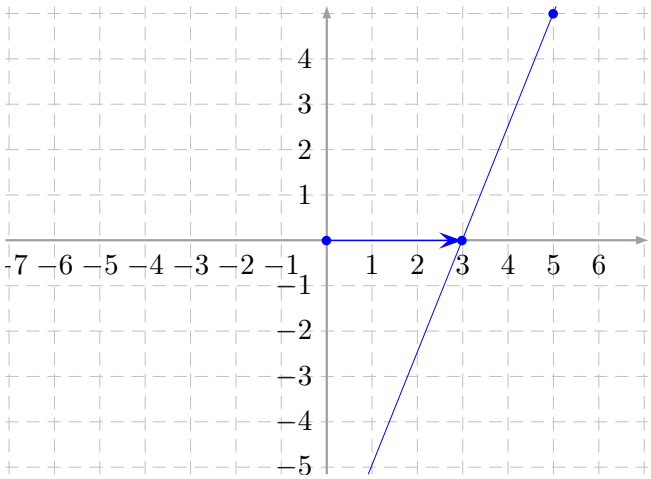
Exercício 15. Dados os vetores $u = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e $v = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, determine $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha u + \beta v = (1, 0)$. Nesse caso, dizemos que $(1, 0)$ é uma combinação linear dos vetores u e v.

Exercício 16. Dados os vetores $u = (1, 1)$ e $v = (-1, -1)$, existem escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha u + \beta v = (1, 0)$? Justifique sua resposta.

Exercício 17. Dado o vetor $u = (5, 1)$, verifique que o conjunto de todos os pontos (x, y) tais que $(x, y) = \lambda u$, para $\lambda \in \mathbb{R}$, é a reta do exercício 8.

Exercício 18. Esboçe o conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) = \lambda(3, -1), \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Exercício 19. Verifique que a reta que passa pelos pontos $(3, 0)$ e $(5, 5)$ pode ser expressa como o conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) = \lambda u + v, \lambda \in \mathbb{R}\}$, onde $u = (2, 5)$ e $v = (3, 0)$ são vetores do plano.



Exercício 20. Determine vetores u e v tais que a reta dada pelo conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) = \lambda u + v, \lambda \in \mathbb{R}\}$ passe pelos pontos $(-3, 3)$ e $(3, 2)$.

Exercício 21. Determine vetores u e v tais que a reta dada pelo conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) = \lambda u + v, \lambda \in \mathbb{R}\}$ passe pelos pontos $(3, 2)$ e $(-4, -1)$.

Definição 2 (Produto Escalar)**.** *O produto escalar de dois vetores $u = (a, b)$ e $v = (x, y)$ é o escalar definido através da seguinte equação:*

$$\langle u, v \rangle = ax + by. \tag{1}$$

Exercício 22. Esboçe os vetores abaixo e calcule o produto escalar:

a) $u = (1, 1)$ e $v = (-1, 1)$;

b) $u = (1, 1)$ e $v = (-1, -1)$;

c) $u = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e $v = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$;

d) $u = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ e $v = (\frac{\sqrt{3}}{3}, 4)$;

Definição 3. *A norma de um vetor $u = (x, y)$, denotada por $\|u\|$, representa o tamanho ou comprimento do vetor e é dada pela equação*

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{2}$$

A distância entre dois pontos no plano $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$, denotada por $d(u, v)$, é dada pela equação:

$$d(u, v) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2}. \tag{3}$$

Se u e v são os vetores que partem da origem e terminam nesses dois pontos, então $d(u, v) = \|u - v\|$.

Exercício 23. Determine a distância entre os seguintes pontos do plano:

a) $(1, 3)$ e $(4, 7)$;

b) $(-3, 2)$ e $(1, 0)$;

c) $(0, -4)$ e $(3, 0)$;

d) $(-3, 4)$ e $(2, 8)$;

e) $(5, 12)$ e $(0, 0)$;

f) $(2, 7)$ e $(-1, 4)$.

Exercício 24. Desenhe os triângulos retângulos e determine o comprimento de cada um de seus lados se as coordenadas no plano forem:

a) $(-1, 1)$, $(3, 1)$ e $(3, -2)$.

b) $(-5, 3)$, $(7, 3)$ e $(7, -2)$.

Exercício 25. Um triângulo equilátero tem vértices $(3, 0)$ e $(-3, 0)$ no plano $\mathbb{R}^2$. Determine as coordenadas do terceiro vértice e calcule a área do triângulo.

Exercício 26. Os pontos $A(0, 0)$, $B(5, 1)$ e $C(1, 3)$ são vértices de um paralelogramo. Encontre as coordenadas do quarto vértice se:

a) O segmento de reta que liga os pontos A e B representa uma diagonal;

b) O segmento de reta que liga os pontos A e C representa uma diagonal;

c) O segmento de reta que liga os pontos B e C representa uma diagonal.

Exercício 27. Determine se o triangulo cujos vértices são os pontos $(-2, -3)$, $(5, 1)$ e $(-2, 5)$ é equilátero, isoceles ou escaleno.