Análise Numérica

Marcos Eduardo Valle

12 de maio de 2009

Sumário

Capítulo 1

Transformações Ortogonais e Reflexões de Householder

Exercício 1.1. Mostre que se $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ satisfaz $\mathbf{S}^T = -\mathbf{S}$, então $\mathbf{I} - \mathbf{S}$ é não singular e a matrix $\mathbf{Q} = (\mathbf{I} - \mathbf{S})^{-1}(I + \mathbf{S})$, chamada *transformação de Cayley de* $\mathbf{S}$, é ortogonal.

Exercício 1.2. A norma de Frobenius de uma matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ é definida através da seguinte equação:

$$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}\,. \tag{1.1}$$

Mostre que $\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\mathrm{tr}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})}$ e $\|\mathbf{QA}\|_F = \|\mathbf{A}\|_F$ se $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ for uma matriz ortogonal.

Exercício 1.3. Mostre que $\mathbf{Q} = \mathbf{I} - 2\mathbf{P}$ é uma matriz ortogonal se $\mathbf{P}$ é uma projeção ortogonal.

Exercício 1.4. Dados vetores não-nulos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ em $\mathbb{R}^n$, determine a reflexão de Householder $\mathbf{H}$ tal que $\mathbf{Hx}$ é um múltiplo de $\mathbf{y}$.

Exercício 1.5. Use reflexões de Householder para mostrar que $\det(\mathbf{I} + \mathbf{xy}^T) = 1 + \mathbf{x}^T\mathbf{y}$ para quaisquer $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

Exercício 1.6. Sejam $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\mathbf{D} = diag(d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Especifique como determinar uma matriz ortogonal $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $\mathbf{QA} - \mathbf{DQ}^T = \mathbf{R}$ seja triangular superior.

Exercício 1.7. Considere vetores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Mostre que se $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é uma matriz ortogonal tal que

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{x} = \begin{bmatrix}\alpha \\ \mathbf{y}\end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{Q}^T\mathbf{y} = \begin{bmatrix}\beta \\ \mathbf{v}\end{bmatrix}, \tag{1.2}$$

então $\mathbf{u}^T\mathbf{v} = \mathbf{x}^T\mathbf{y} - \alpha\beta$.

Capítulo 2

Decomposição em Valores Singulares

Exercício 2.1. Seja $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$ a decomposição SVD de uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Mostre que, se existe $r \leq p$ tal que

$$\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \ldots = \sigma_p = 0\,, \tag{2.1}$$

então

$$posto(\mathbf{A}) = r\,, \tag{2.2}$$

$$\mathcal{N}(\mathbf{A}) = span\{\mathbf{v}_{r+1}, \ldots, \mathbf{v}_n\}\,, \tag{2.3}$$

$$\mathcal{I}(\mathbf{A}) = span\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r\}\,, \tag{2.4}$$

onde $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ e $\mathcal{I}(\mathbf{A})$ denotam o núcleo e a imagem de $\mathbf{A}$, respectivamente.

Exercício 2.2. Seja $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$ a decomposição SVD de uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ não singular. Mostre que $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{V}^T$ e $\|\mathbf{A}^{-1}\|_2 = s_{min}^{-1}$, onde s_{min} denota o menor valor singular de $\mathbf{A}$.

Exercício 2.3. Prove que σ_{max}, o maior valor singular de uma matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, satisfaz a seguinte equação:

$$\sigma_{max} = \max\left\{\frac{\mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2\|\mathbf{y}\|_2} : \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \;\; \mathbf{e} \;\; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\right\}\,. \tag{2.5}$$

Exercício 2.4. Mostre que se $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tem posto n, então $\|A(A^TA)^1A^T\|_2 = 1$.

Exercício 2.5. Mostre que $\|\mathbf{A}\|_F \leq \sqrt{posto(\mathbf{A})}\|\mathbf{A}\|_2$ para toda matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Exercício 2.6. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ uma matriz de posto r. Mostre que $\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_r^2}$, onde $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ representam os r valores singulares não-nulos de $\mathbf{A}$.

Exercício 2.7. Mostre que toda matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ é o limite de uma sequência de matrizes $\mathbf{A}_n \in \mathbb{R}^{m\times n}$ de posto completo. Portanto, o conjunto das matrizes de posto completo é denso em $\mathbb{R}^{m\times n}$.

Exercício 2.8. Seja $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $\|\mathbf{P}^T\mathbf{P} - \mathbf{I}\|_2 = \varepsilon < 1$ e $\mathbf{P} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$ a decomposição SVD de $\mathbf{P}$. Mostre que $\|\mathbf{P} - \mathbf{U}\mathbf{V}^T\|_2 \leq \varepsilon$ e que todos os valores singulares de $\mathbf{P}$ estão no invervalo $[1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$, i.e., $|1-\sigma_i| \leq \varepsilon$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

Capítulo 3

Auto-valores e Auto-vetores

Exercício 3.1. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Mostre que se $a + ib$ é um auto-valor de $\mathbf{A}$ associado ao auto-vetor $\mathbf{u} + i\mathbf{v}$, então $a - ib$ é um auto-valor de $\mathbf{A}$ associado ao auto-vetor $\mathbf{u} - i\mathbf{v}$.

Exercício 3.2. Um polinômio em uma matriz $\mathbf{A}$ é uma expressão da forma $p(\mathbf{A}) = \alpha_0+\alpha_1\mathbf{A}+ \ldots + \alpha_m\mathbf{A}^m$. Mostre que, se λ e $\mathbf{x}$ representam um auto-valor e um auto-vetor associado da matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, então $p(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \ldots + \alpha_m\lambda^m$ é um auto-valor de $p(\mathbf{A})$ associado ao auto-vetor $\mathbf{x}$.

Exercício 3.3. Sejam $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ com pelo menos uma delas não-singular. Mostre que $\mathbf{AB}$ e $\mathbf{BA}$ possuem os mesmos auto-valores.

Exercício 3.4. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz simétrica. Usando a decomposição de Schur, mostre que existe uma matriz ortogonal $\mathbf{Q}$ tal que $\mathbf{Q}^T\mathbf{AQ} = \mathbf{D}$ é uma matriz diagonal. O que pode ser dito sobre a decomposição SVD de $\mathbf{A}$.

Exercício 3.5. Uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ é dita *normal* se $\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{AA}^*$. Mostre que, se $\mathbf{T} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ é normal e triangular superior, então $\mathbf{T}$ é diagonal. Mostre também que toda matriz normal é diagonalizável, i.e., $\mathbf{A}$ pode ser escrita como $\mathbf{A} = \mathbf{V\Lambda V}^{-1}$ onde $\mathbf{\Lambda}$ é uma matriz diagonal.

Exercício 3.6. Suponha que $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ possua auto-valores distintos. Mostre que se $\mathbf{Q}^*\mathbf{AQ} = \mathbf{T}$ é a decomposição de Schur de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, então $\mathbf{Q}^*\mathbf{BQ}$ é triangular superior.

Exercício 3.7. Dada uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, use a decomposição de Schur para mostrar que, para todo $\epsilon > 0$, existe uma matriz diagonalizável $\mathbf{B}$ tal que $\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|_2 \leq \epsilon$. Portanto, o conjunto das matrizes diagonalizáveis é denso em $\mathbb{C}^{n\times n}$.

Exercício 3.8. Mostre que o traço de uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ é a soma de seus auto-valores.

Exercício 3.9. Mostre que, se $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é simétrica então $\mathbf{PAP}^T$ é também uma matriz simétrica para qualquer matriz $\mathbf{P}$. Use esse resultado para concluir que toda matriz de Hessenberg $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica é uma matriz tridiagonal.

Exercício 3.10. Mostre que, se $\mathbf{H}$ é uma matriz de Hessenberg e $\mathbf{U}$ é triangular superior, então o produto $\mathbf{UH}$ é também uma matriz de Hessenberg. Mostre que essa multiplicação requer $\mathcal{O}(n^2)$ operações.

Exercício 3.11. Seja $\mathbf{A}_k$ a sequencia de matrizes gerada pelo método QR. Defina $\hat{\mathbf{Q}}_k = \mathbf{Q}_0 \ldots \mathbf{Q}_{k-1}$ e $\hat{\mathbf{R}}_k = \mathbf{R}_{k-1} \ldots \mathbf{R}_0$. Mostre por indução que $\mathbf{A}_k = \hat{\mathbf{Q}}_k\hat{\mathbf{R}}_k$ e conclua que a primeira coluna de $\hat{\mathbf{Q}}_k$ é um múltiplo de $\mathbf{A}^k\mathbf{e}_1$.

Exercício 3.12. A matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \tag{3.1}$$

possui auto-valores 1 e 3 associados aos auto-vetores $[1, -1]^T$ e $[1, 1]^T$, respectivamente.

a) Aplique vários passos do método da potência nesta matriz partindo do vetor $\mathbf{x}_0 = [1, 0]^T$. Aplique um número de iterações suficiente para obervar a taxa de convergência.

b) Aplique o método da potência com o deslocamento (shift) $\mathbf{A} - \frac{1}{2}\mathbf{I}$. Discuta a taxa de convergência tendo em vista esse deslocamento.