Transformada Fuzzy

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

05 de Maio de 2014

Transformadas Fuzzy

Transformadas Fuzzy

Introduzidas por I. Perfilieva em “Fuzzy Transforms: Theory and Applications”, Fuzzy Sets and Systems, 157 (2006), pp. 993–1023.

Número de citações:

Web of Science:	96
Scopus:	127.

Ideia:

Transforma uma função real $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ em um vetor do $\mathbb{R}^n$ usando conceitos da teoria dos conjuntos fuzzy.

Partição Fuzzy

Definição (Partição Fuzzy)

Considere nós $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Dizemos que os conjuntos fuzzy $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forma uma partição de $[a, b]$ se, para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$, tem-se

- $A_k : [a, b] \to [0, 1]$, $A_k(x_k) = 1$.
- $A_k(x) = 0, x \in [x_{k-1}, x_{k+1}]$, com $x_0 = a$ e $x_{n+1} = b$.
- A_k é contínua.
- A_k é crescente em $[x_{k-1}, x_k]$ e decrescente em $[x_k, x_{k+1}]$.
- $\sum_{k=1}^{n} A_k(x) = 1$, para todo $x \in [a, b]$.

Partição Fuzzy

Definição (Partição Uniforme)

Uma partição $A_1, A_2, \ldots, A_n$ é uniforme se os nós $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são equidistantes, isto é, $x_k = a + h(k-1)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, e

- $A_k(x_k - x) = A_k(x_k + x)$.
- $A_k(x) = A_{k-1}(x - h)$ e $A_{k+1}(x) = A_k(x - h)$.

As condições devem ser adaptadas para A_1 e A_n.

Observação

Restrições são impostas tanto nos nós $x_1, \ldots, x_n$ como nos conjuntos fuzzy $A_1, \ldots, A_n$.

Transformada Fuzzy

Definição (Transformada Fuzzy Direta)

Considere uma partição fuzzy $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de $[a, b]$ e $f \in \mathcal{C}([a, b])$. O vetor $\mathbf{F}_n[f] = [F_1, \ldots, F_n]^T \in \mathbb{R}^n$ dado por

$$F_k = \frac{\int_a^b f(x) A_k(x) dx}{\int_a^b A_k(x) dx}, \forall k = 1, \ldots, n,$$

é a transformada fuzzy (Transformada-F) de f com respeito à partição $A_1, \ldots, A_n$.

Transformada Fuzzy

Propriedades:

- **Linearidade:**

$$\mathbf{F}_n\left[\alpha f + \beta g\right] = \alpha \mathbf{F}_n\left[f\right] + \beta \mathbf{F}_n\left[g\right].$$

- **Valores Médios Ponderados:**
  O coeficiente F_k de $\mathbf{F}_n\left[f\right]$ minimiza

$$\Phi(y) = \int_a^b (f(x) - y)^2 A_k(x) dx.$$

Outras propriedades são apresentadas na literatura.

Transformada Fuzzy Inversa

Pergunta - Resposta

É possível reconstruir a função f usando sua transformada fuzzy?
Não, mas a função reconstruída pode aproximar a função original!

Definição (Transformada Fuzzy Inversa)

Considere uma partição fuzzy $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de $[a, b]$ e $\mathbf{F} = [F_1, \ldots, F_n]^T$ um vetor em $\mathbb{R}^n$. A função $f_{F,n}$ dada por

$$f_{F,n}(x) = \sum_{k=1}^{n} F_k A_k(x), \forall x \in [a, b],$$

é chamada transformada fuzzy inversa.

Propriedade de Aproximação

Teorema

Seja $f \in \mathcal{C}([a,b])$. *Dado* $\epsilon > 0$, *existe* n_ϵ *e uma partição fuzzy* $A_1, \ldots, A_{n_\epsilon}$ *de* $[a,b]$ *tal que*

$$|f(x) - f_{F,n_\epsilon}(x)| \leq \epsilon, \quad \forall x \in [a,b],$$

em que e $f_{F,n_\epsilon}(x)$ *é a transformada fuzzy inversa de* $\mathbf{F}_n[f]$

Transformada Fuzzy Discreta

Suponha que conhecemos o valor de f somente em pontos $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \ldots, p_l\} \subseteq [a, b]$. Suponha também que $\mathcal{P}$ é suficientemente denso com respeito a partição fuzzy $A_1, \ldots, A_n$, ou seja, $n < l$ e

$$\forall k, \exists j : A_k(p_j) > 0.$$

Definição (Transformada Fuzzy Discreta)

A transformada fuzzy discreta fornece o vetor $\mathbf{F}_n[f] = [F_1, \ldots, F_n]^T$ com

$$F_k = \frac{\sum_{j=1}^{k} f(p_j) A_k(p_j)}{\sum_{j=1}^{l} A_k(p_j)}.$$

Transformada Fuzzy Discreta

Observação

A transformada fuzzy discreta satisfaz propriedades análogas a transformada fuzzy direta. Em particular, o coeficiente F_k minimiza

$$\Phi(y) = \sum_{j=1}^{l} (f(p_j) - y)^2 A_k(p_j).$$

Definição (Transformada Fuzzy Discreta Inversa)

A transformada fuzzy discreta inversa de $\mathbf{F} = [F_1, \ldots, F_n]^T$ é a dada por

$$f_{F,n}(p) = \sum_{k=1}^{n} F_k A_k(p), \quad \forall p \in \mathcal{P}.$$

Propriedade de Aproximação

Teorema

Seja f uma função avaliada em $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_l\} \subseteq [a, b]$. *Dado* $\epsilon > 0$, *existe* n_ϵ *e uma partição fuzzy* $A_1, \ldots, A_{n_\epsilon}$ *de* $[a, b]$ *tal que* $\mathcal{P}$ *é suficientemente densa com respeito à* $A_1, \ldots, A_n$ *e, para todo* $p \in \mathcal{P}$, *tem-se*

$$|f(p) - f_{F,n_\epsilon}(p)| \leq \epsilon,$$

em que f_{F,n_ϵ} *denota a transformada fuzzy discreta inversa de* $\mathbf{F}_n[f]$.

Transformada Fuzzy em Reticulados Residuais

Definição (Reticulado Residual)

Uma álgebra $\mathcal{L} = \langle L, \vee, \wedge, \star, \to, 0, 1 \rangle$ é um reticulado residual se:

- $\langle L, \vee, \wedge, 0, 1 \rangle$ é um reticulado limitado com maior elemento 1 e menor elemento 0.
- $\langle L, \star, 1 \rangle$ é um monoide comutativo, ou seja, $\star$ é uma operação associativa, comutativa e $a \star 1 = a$ para todo $a \in L$.
- As operações $\star$ e $\to$ formam uma adjunção, ou seja,

$$a \star b \leq c \quad \text{se e somente se} \quad a \leq b \to c.$$

Exemplo

Vamos considerar $L = [0, 1]$ e $\star$ como sendo uma t-norma como, por exemplo, o produto, minimo ou a t-norma de Lukasiewicz.

Transformada Discreta $F^{\uparrow}$.

Definição (Cobertura Fuzzy)

Uma família de conjuntos fuzzy $A_1, \ldots, A_n$ é uma cobertura de $[a, b]$ se

$$\forall x \in [a, b], \exists k : A_k(x) > 0.$$

Definição (Transformada Discreta $F^{\uparrow}$)

Seja f uma função conhecida em $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_l\}$ com valores em $[0, 1]$ e $A_1, \ldots, A_n$, $n < l$, uma cobertura de $[a, b]$. A transformada (discreta) $F^{\uparrow}$ de f com respeito à $A_1, \ldots, A_n$ é o vetor $\mathbf{F}_n^{\uparrow}[f] = [F_1^{\uparrow}, \ldots, F_n^{\uparrow}]^T$ dado por

$$F_k^{\uparrow} = \bigvee_{j=1}^{l} \left[A_k(p_j) \star f(p_j) \right], \quad k = 1, \ldots, n.$$

Propriedades da Transformada $F^{\uparrow}$.

Propriedades:

- **"Linearidade":**

$$\mathbf{F}_n^{\uparrow}[(\alpha \star f) \vee (\beta \star g)] = (\alpha \star \mathbf{F}_n^{\uparrow}[f]) \vee (\beta \star \mathbf{F}_n^{\uparrow}[g]).$$

- **Monotonicidade:**

$$f \leq g \quad \text{implica} \quad \mathbf{F}_n^{\uparrow}[f] \leq \mathbf{F}_n^{\uparrow}[g]\,.$$

- **Mínimo de um Conjunto:**
  A componente $F_k^{\uparrow}$ de $\mathbf{F}_n^{\uparrow}[f]$ é o menor elemento do conjunto

$$\mathcal{S}_k = \{x \in [0,1] : A_k(p_j) \leq \big(f(p_j) \rightarrow x\big)\,, \forall j = 1, \ldots, l\}.$$

Transformada Fuzzy $F^{\uparrow}$ inversa

Definição (Transformada $F^{\uparrow}$ Inversa)

A transformada $F^{\uparrow}$ inversa de $\mathbf{F}^{\uparrow} = [F_1^{\uparrow}, \ldots, F_n^{\uparrow}]^T$ é a dada por

$$f_{F,n}^{\uparrow}(p) = \bigwedge_{k=1}^{n} \left(A_k(p) \rightarrow F_k^{\uparrow} \right), \quad \forall p \in \mathcal{P}.$$

Propriedades da Transformada Fuzzy $F^{\uparrow}$

Propriedades:

- **Aproximação por cima:**
  Se $f^{\uparrow}_{F,n}$ é a transformada $F^{\uparrow}$ inversa de $\mathbf{F}^{\uparrow}_n[f]$, então
  $$f^{\uparrow}_{F,n}(p) \geq f(p), \quad \forall p \in \mathcal{P}.$$
- **Idempotência:**
  Se $f^{\uparrow}_{F,n}$ é a transformada $F^{\uparrow}$ inversa de $\mathbf{F}^{\uparrow}_n[f]$, então
  $$F^{\uparrow}_k = \bigvee_{j=1}^{l} A_k(p_j) \star f^{\uparrow}_{F,n}(p_j).$$

Propriedades:

- **Elemento Maximal:**
A transformada $F^{\uparrow}$ inversa $f^{\uparrow}_{F,n}$ é o maior elemento do conjunto $\Phi^{\uparrow}_{F,n}$ de todas as funções que possuem a mesma transformada $F^{\uparrow}$, ou seja, $f, g \in \Phi^{\uparrow}_{F,n}$ se $\mathbf{F}^{\uparrow}_{n}[f] = \mathbf{F}^{\uparrow}_{n}[g]$.

Transformada Discreta $F^{\downarrow}$.

Definição (Transformada Discreta $F^{\downarrow}$)

Seja f uma função conhecida em $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_l\}$ com valores em $[0, 1]$ e $A_1, \ldots, A_n$, $n < l$, uma cobertura de $[a, b]$. A transformada (discreta) $F^{\downarrow}$ de f com respeito à $A_1, \ldots, A_n$ é o vetor $\mathbf{F}_n^{\downarrow}[f] = [F_1^{\uparrow}, \ldots, F_n^{\uparrow}]^T$ dado por

$$F_k^{\uparrow} = \bigwedge_{j=1}^{l} \left[A_k(p_j) \rightarrow f(p_j)\right], \quad k = 1, \ldots, n.$$

Definição (Transformada $F^{\uparrow}$ Inversa)

A transformada $F^{\downarrow}$ inversa de $\mathbf{F}^{\downarrow} = [F_1^{\downarrow}, \ldots, F_n^{\downarrow}]^T$ é a dada por

$$f_{F,n}^{\downarrow}(p) = \bigvee_{k=1}^{n} \left(A_k(p) \star F_k^{\downarrow}\right), \quad \forall p \in \mathcal{P}.$$

Propriedades da Transformada $F^{\downarrow}$.

Propriedades:

- **"Linearidade":**

$$\mathbf{F}_n^{\downarrow}[(\alpha \to f) \wedge (\beta \to g)] = (\alpha \to \mathbf{F}_n^{\downarrow}[f]) \wedge (\beta \to \mathbf{F}_n^{\downarrow}[g]).$$

- **Monotonicidade:**

$$f \leq g \quad \text{implica} \quad \mathbf{F}_n^{\downarrow}[f] \leq \mathbf{F}_n^{\downarrow}[g]\,.$$

- **Máximo de um Conjunto:**
  A componente $F_k^{\downarrow}$ de $\mathbf{F}_n^{\downarrow}[f]$ é o maior elemento do conjunto

$$\mathcal{T}_k = \{x \in [0,1] : A_k(p_j) \leq \left(x \to f(p_j)\right), \forall j = 1, \ldots, l\}.$$

Propriedades da Transformada $F^{\downarrow}$.

Propriedades:

- **Aproximação por baixo:**
  Se $f^{\downarrow}_{F,n}$ é a transformada $F^{\downarrow}$ inversa de $\mathbf{F}^{\downarrow}_n[f]$, então

$$f^{\downarrow}_{F,n}(p) \leq f(p), \quad \forall p \in \mathcal{P}.$$

- **Idempotência:**
  Se $f^{\downarrow}_{F,n}$ é a transformada $F^{\downarrow}$ inversa de $\mathbf{F}^{\downarrow}_n[f]$, então

$$F^{\downarrow}_k = \bigwedge_{j=1}^{l} \left(A_k(p_j) \to f^{\uparrow}_{F,n}(p_j) \right).$$

- **Elemento Minimal:**
  A transformada $F^{\downarrow}$ inversa é o menor elemento do conjunto $\Phi^{\downarrow}_{F,n}$ de todas as funções que possuem a mesma transformada $F^{\downarrow}$.