Equações Diferenciais Fuzzy

Parte II

Derivada Fortemente Generalizada

Luciana Takata Gomes

Francielle Santo Pedro Simões

Departamento de Matemática Aplicada
IMECC - UNICAMP

2013

PVI Fuzzy

Problema de valor inicial fuzzy:

$$\begin{cases} x'(t) & = & f(t, x(t)) \\ x(t_0) & = & x_0 \end{cases}$$

$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$,
$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$
$x_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$.

Derivada Fortemente Generalizada

Dada $x : (a, b) \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, x é diferenciável no sentido fortemente generalizado em $t \in (a, b)$ se os limites do par

(i) $$\lim_{h \searrow 0} \frac{x(t+h) \ominus x(t)}{h} \text{ and } \lim_{h \searrow 0} \frac{x(t) \ominus x(t-h)}{h}$$

ou

(ii) $$\lim_{h \searrow 0} \frac{x(t) \ominus x(t+h)}{-h} \text{ and } \lim_{h \searrow 0} \frac{x(t-h) \ominus x(t)}{-h}$$

ou

(iii) $$\lim_{h \searrow 0} \frac{x(t+h) \ominus x(t)}{h} \text{ and } \lim_{h \searrow 0} \frac{x(t-h) \ominus x(t)}{-h}$$

ou

(iv) $$\lim_{h \searrow 0} \frac{x(t) \ominus x(t+h)}{-h} \text{ and } \lim_{h \searrow 0} \frac{x(t) \ominus x(t-h)}{h}$$

existem e são iguais a algum elemento $x'(t) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$.

Pergunta

Dados $x \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$,

$$x \ominus \int_a^t f(s)ds$$

existe??

Notação

$$[f(t)]_\alpha = [f_\alpha^-(t), f_\alpha^+(t)]$$

Notação

$$[f(t)]_\alpha = [f_\alpha^-(t), f_\alpha^+(t)]$$

$$[x]_\alpha = [x_\alpha^-, x_\alpha^+]$$

Lema

Se

- x_α^-, x_α^+ são diferenciáveis com respeito a α, com x^- estritamente crescente e x_1^+ estritamente decrescente, constantes $c1 > 0$ e $c2 < 0$ satisazendo $(x_\alpha^-)' \geq c_1$ e $(x_\alpha^+)' \leq c_2$ $\forall \alpha \in [0, 1]$;
- $f : [a, b] \to \mathbb{R}_\mathcal{F}$ contínua em t;
- $\frac{\partial f_\alpha^-(t)}{\partial \alpha}$ e $\frac{\partial f_\alpha^+(t)}{\partial \alpha}$ limitadas com respeito a α;
- Uma das duas possibilidades ocorre:
  a) $x_1^- < x_1^+$ ou
  b) $x_1^- = x_1^+$ e $[f(t)]_1$ consiste em exatamente um elemento para todo $t \in [a, b]$,

então

$$x \ominus \int_a^t f(s)ds$$

existe.

Notação

$$[f(t,x)]_\alpha = [f_\alpha^-(t,x), f_\alpha^+(t,x)]$$

Notação

$$[f(t,x)]_\alpha = [f_\alpha^-(t,x), f_\alpha^+(t,x)]$$

$$[x_0]_\alpha = [(x_0^-)_\alpha, (x_0^+)_\alpha]$$

Notação

$$[f(t,x)]_\alpha = [f_\alpha^-(t,x), f_\alpha^+(t,x)]$$

$$[x_0]_\alpha = [(x_0^-)_\alpha, (x_0^+)_\alpha]$$

$$\frac{dx_0^-}{d\alpha} = (x_0^-)'_\alpha \quad \text{e} \quad \frac{dx_0^+}{d\alpha} = (x_0^+)'_\alpha$$

Existência e Unicidade de Duas Soluções

Se

- $R_0 = [t_0, t_0 + p] \times \bar{B}(x_0, q), \; p, q > 0;$
- $f : R_0 \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ contínua;
- Existe $L > 0$ constante tal que, para todo par (t, x) e (t, y) em R_0,

$$D(f(t,x), f(t,y)) \leq L \cdot D(x,y);$$

- $\frac{\partial f_\alpha^-(t)}{\partial \alpha}$ e $\frac{\partial f_\alpha^+(t)}{\partial \alpha}$ limitadas com respeito a α;
- x_0^- e x_0^+ são diferenciáveis com relação a α;
- Existe $c_1 > 0$ com $(x_0^-)'_\alpha \geq c_1$ e
existe $c_2 < 0$ com $(x_0^+)'_\alpha \leq c_2$, para todo $\alpha \in [0,1]$.
- Uma das duas possibilidades ocorre:
a) $(x_0)_1^- < (x_0)_1^+$ ou
b) $(x_0)_1^- = (x_0)_1^+$ e, neste caso, $[f(t,x)]_1$ consiste em exatamente um elemento, sempre que $[x]_1$ consistir em apenas um elemento.

Existência e Unicidade de Duas Soluções

Então o PVIF com a derivada fortemente generalizada tem exatamente duas soluções em algum intervalo $[t_0, t_0 + k]$, $k > 0$.

Resultado de Caracterização

Se

- $R_0 = [t_0, t_0 + p] \times \bar{B}(x_0, q)$, $p, q > 0$;
- $f : R_0 \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ tal que
$$[f(t,x)]_\alpha = [f_\alpha^-(t, x_\alpha^-, x_\alpha^+), f_\alpha^+(t, x_\alpha^-, x_\alpha^+)];$$
- $f_\alpha^\pm(t, x_\alpha^-, x_\alpha^+)$ são equicontínuas e existe $L > 0$ constante tal que, para todo par (t, x) e (t, y) em R_0, e $\alpha \in [0, 1]$
$$|f_\alpha^\pm(t, x_\alpha^-, x_\alpha^+) - f_\alpha^\pm(t, y_\alpha^-, y_\alpha^+)| \leq L(|x_\alpha^- - y_\alpha^-| + |x_\alpha^+ - y_\alpha^+|)$$
- $\frac{\partial f_\alpha^-(t)}{\partial \alpha}$ e $\frac{\partial f_\alpha^+(t)}{\partial \alpha}$ limitadas com respeito a α;
- x_0^- e x_0^+ são diferenciáveis com relação a α
- Existe $c_1 > 0$ com $(x_0^-)'_\alpha \geq c_1$ e existe $c_2 < 0$ com $(x_0^+)'_\alpha \leq c_2$, para todo $\alpha \in [0, 1]$.
- Uma das duas possibilidades ocorre:
a) $(x_0)_1^- < (x_0)_1^+$ ou
b) $(x_0)_1^- = (x_0)_1^+$ e, neste caso, $[f(t,x)]_1$ consiste em exatamente um elemento, sempre que $[x]_1$ consistir em apenas um elemento.

Existência e Unicidade de Duas Soluções

Então o PVIF com a derivada fortemente generalizada em algum intervalo $[t_0, t_0 + k]$, $k > 0$, é equivalente à união dos dois seguintes sistemas:

$$\left\{ \begin{array}{c} (x_\alpha^-)' = f_\alpha^-(t, x_\alpha^-(t), x_\alpha^+(t)) \\ (x_\alpha^+)' = f_\alpha^+(t, x_\alpha^-(t), x_\alpha^+(t)) \\ x_\alpha^-(t_0) = (x_0)_\alpha^-, x_\alpha^+(t_0) = (x_0)_\alpha^+ \end{array} \right. \quad , \alpha \in [0, 1]$$

$$\left\{ \begin{array}{c} (x_\alpha^-)' = f_\alpha^+(t, x_\alpha^-(t), x_\alpha^+(t)) \\ (x_\alpha^+)' = f_\alpha^+(t, x_\alpha^-(t), x_\alpha^+(t)) \\ x_\alpha^-(t_0) = (x_0)_\alpha^-, x_\alpha^+(t_0) = (x_0)_\alpha^+ \end{array} \right. \quad , \alpha \in [0, 1].$$

Exemplo

Modelo de decaimento:

$$\begin{cases} x'(t) &= -\lambda x(t) \\ x(0) &= x_0 \end{cases}$$

$\lambda > 0$ e x_0 um número fuzzy.

Exemplo

$$\begin{cases} [x'(t)]_\alpha & = & [-\lambda x(t)]_\alpha \\ [x(0)]_\alpha & = & [x_0]_\alpha \end{cases}$$

Exemplo

O resultado de caracterização fornece:

$$\begin{cases} [(x_\alpha^-)'(t), (x_\alpha^+)'(t)] & = & [-\lambda x_\alpha^+(t), -\lambda x_\alpha^-(t)] \\ [x_\alpha^-(0), x_\alpha^+(0)] & = & [x_{0\alpha}^-, x_{0\alpha}^+] \end{cases}$$

$$\begin{cases} [(x_\alpha^+)'(t), (x_\alpha^-)'(t)] & = & [-\lambda x_\alpha^+(t), -\lambda x_\alpha^-(t)] \\ [x_\alpha^-(0), x_\alpha^+(0)] & = & [x_{0\alpha}^-, x_{0\alpha}^+] \end{cases}$$

Exemplo

$$\begin{cases} (x_\alpha^-)'(t) &= -\lambda x_\alpha^+(t), \\ (x_\alpha^+)'(t) &= -\lambda x_\alpha^-(t), \\ x_\alpha^-(0) &= x_{0\alpha}^-, \\ x_\alpha^+(0) &= x_{0\alpha}^+ \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x_\alpha^-)'(t) &= -\lambda x_\alpha^-(t), \\ (x_\alpha^+)'(t) &= -\lambda x_\alpha^+(t), \\ x_\alpha^-(0) &= x_{0\alpha}^-, \\ x_\alpha^+(0) &= x_{0\alpha}^+ \end{cases}$$

Exemplo

Solução 1:

$$\begin{cases} x_\alpha^-(t) & = & c_\alpha^- e^{\lambda t} + c_\alpha^+ e^{-\lambda t} \\ x_\alpha^+(t) & = & -c_\alpha^- e^{\lambda t} + c_\alpha^+ e^{-\lambda t} \end{cases}$$

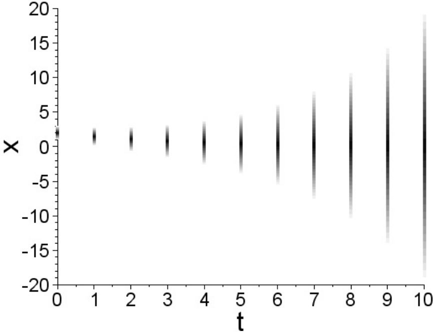
com

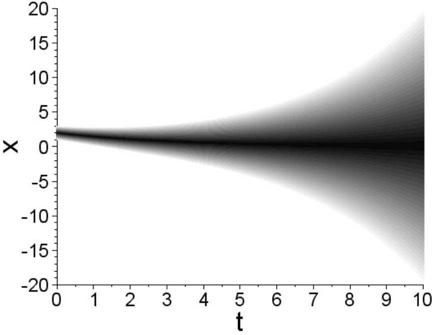
$$c_\alpha^- = \frac{x_{0\alpha}^- - x_{0\alpha}^+}{2} \quad \text{e} \quad c_\alpha^+ = \frac{x_{0\alpha}^- + x_{0\alpha}^+}{2}.$$

Solução 2:

$$\begin{cases} x_\alpha^-(t) & = & x_{0\alpha}^- e^{-\lambda t} \\ x_\alpha^+(t) & = & x_{0\alpha}^+ e^{-\lambda t} \end{cases}$$

Exemplo


x
t
20
15
10
5
0
-5
-10
-15
-20
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10


x
t
20
15
10
5
0
-5
-10
-15
-20
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Exemplo