Equações Diferenciais Fuzzy

Francielle Santo Pedro

Luciana Takata Gomes

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica- IMECC
Unicamp - Campinas

29 de Agosto, 2013

EDF

Considere o seguinte problema

$$\begin{cases} x'(t) & = & f(t, x(t)) \\ x(t_0) & = & x_0 \end{cases},$$

sendo $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ contínua e $x_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$.

Diferenciabilidade de Hukuhara

Diferenciabilidade de Hukuhara

Lema

Seja $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ contínua e $x_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ então

$$\begin{cases} x'(t) & = & f(t, x(t)) \\ x(t_0) & = & x_0 \end{cases},$$

é equivalente a equação integral

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$$

em algum intervalo $[t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$.

Diferenciabilidade de Hukuhara

Lema

Seja $R_0 = [t_0, t_0 + p] \times \overline{B}(x_0, q)$ e assuma $f : R_0 \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ contínua e satisfazendo a condição de Lipschitz

$$D(f(t,x), f(t,y)) \leq L \cdot D(x,y)$$

$\forall (t,x), (t,y) \in R_0$. Então f é limitada, i.e., existe $M > 0$ tal que

$$D(f(t,x), 0) \leq M.$$

Diferenciabilidade de Hukuhara

Teorema

Seja $R_0 = [t_0, t_0 + p] \times \overline{B}(x_0, q)$, $p > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ e assuma $f : R_0 \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ contínua e satisfazendo a condição de Lipschitz . Então o problema de valor inicial tem exatamente uma solução em um intervalo $[t_0, t_0 + k]$ para algum $k > 0$.

Diferenciabilidade de Hukuhara

Teorema

Seja $R_0 = [t_0, t_0 + p] \times \overline{B}(x_0, q)$, $p > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ e assuma $f : R_0 \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ contínua tal que

$$[f(t,x)]_r = [f_r^-(t, x_r^-, x_r^+), f_r^+(t, x_r^-, x_r^+)], \quad r \in [0,1].$$

Se $f_r^-, f_r^+, r \in [0,1]$ são equicontínuas e uniformemente Lipschitz no segundo e no terceiro argumentos. Então o problema de valor inicial tem exatamente uma solução em um intervalo $[t_0, t_0 + k]$ para algum $k > 0$. Além disso, a solução é caracterizada pelo sistema

$$\left\{ \begin{array}{lcl} (x_r^-)' & = & f_r^-(t, x_r^-, x_r^+) \\ (x_r^+)' & = & f_r^+(t, x_r^-, x_r^+) \end{array} \right. r \in [0,1].$$

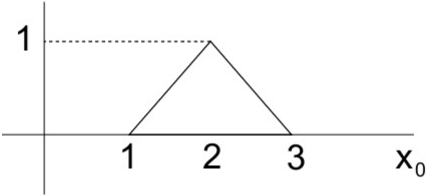
Conclusão: A solução única do sistema acima caracteriza a solução única do PVIF.

Exemplo via Derivada Hukuhara

Modelo de Decaimento:

$$\begin{cases} X'(t) & = & -\lambda X(t) \\ X(0) & = & X_0 \end{cases}$$

$\lambda > 0$ e X_0 um número fuzzy.



Exemplo via Derivada Hukuhara

Então

$$\begin{cases} [X'(t)]^\alpha = [-\lambda X(t)]^\alpha \\ [X(0)]^\alpha = [X_0]^\alpha \end{cases}$$

Exemplo via Derivada Hukuhara

Pelo resultado da caracterização via Hukuhara, temos

$$\begin{cases} [(x_\alpha^-)'(t), (x_\alpha^+)'(t)] &= -\lambda[x_\alpha^-(t), x_\alpha^+(t)] \\ [x_\alpha^-(0), x_\alpha^+(0)] &= [x_{0\alpha}^-, x_{0\alpha}^+] \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{cases} [(x_\alpha^-)'(t), (x_\alpha^+)'(t)] &= [-\lambda x_\alpha^+(t), -\lambda x_\alpha^-(t)] \\ [x_\alpha^-(0), x_\alpha^+(0)] &= [x_{0\alpha}^-, x_{0\alpha}^+] \end{cases}$$

Exemplo via Derivada Hukuhara

Dessa forma,

$$\begin{cases} (x_\alpha^-)'(t) &= -\lambda x_\alpha^+(t), \\ (x_\alpha^+)'(t) &= -\lambda x_\alpha^-(t), \\ x_\alpha^-(0) &= x_{0\alpha}^-, \\ x_\alpha^+(0) &= x_{0\alpha}^+ \end{cases}$$

Exemplo via Derivada Hukuhara

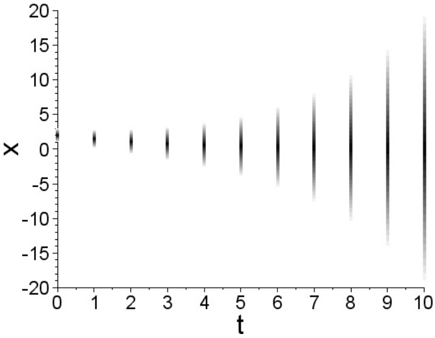
Portanto,

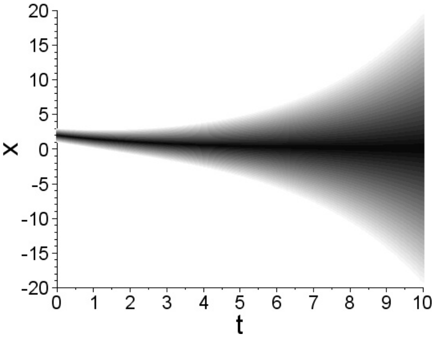
$$\begin{cases} x_\alpha^-(t) &= & c_\alpha^- e^{\lambda t} + c_\alpha^+ e^{-\lambda t} \\ x_\alpha^+(t) &= & -c_\alpha^- e^{\lambda t} + c_\alpha^+ e^{-\lambda t} \end{cases}$$

e

$$c_\alpha^- = \frac{x_{0\alpha}^- - x_{0\alpha}^+}{2} \quad \text{e} \quad c_\alpha^+ = \frac{x_{0\alpha}^- + x_{0\alpha}^+}{2}.$$

Exemplo via Derivada Hukuhara





Extensão da solução

Equações diferenciais crisp

Teorema [Perko]

Seja

$$f : [t_0, t_0 + p] \times [x_0 - q, x_0 + q] \times \overline{B}(a_0, r) \to \mathbb{R}$$

e Lipschitz na segunda e na terceira variável. Então o problema de valor inicial

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x'(t) & = & f(t, x(t), a) \\ x(t_0) & = & x_0 \in \mathbb{R} \end{array} \right. ,$$

sendo $a \in \mathbb{R}$ tem uma única solução.

Extensão da solução

Definição

Seja A, $X_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ números fuzzy e $\widetilde{f}$ a extensão de Zadeh de f. O problema de valor inicial

$$\begin{cases} X'(t) &= \widetilde{f}(t, X(t), A) \\ X(t_0) &= X_0 \end{cases},$$

tem solução $X : [t_0, t_0 + p] \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ sendo X a extensão da solução $x[t_0, t_0 + p] \to \mathbb{R}$ do PVI crisp.

Extensão da solução

Teorema

Seja $f : [t_0, t_0 + p] \times [x_0 - q, x_0 + q] \times \overline{B}(a_0, r)$ e Lipschitz na segunda e na terceira variável. Então a solução do PVI dado na definição anterior é bem definida e contínua. Alem disso, X pode ser definida por níveis como

$$X_r = x(t, (X_0)_r, A_r) = \{x(t, x_0, a) | x_0 \in (X_0)_r, a \in A_r\},$$

sendo $x(t, x_0, a)$ a solução do PVI crisp.

Exemplo via extensão da solução

Considere

$$\begin{cases} x'(t) &= & -(1,2,3)\cdot x(t) \\ x(0) &= & (1,2,3) \end{cases},$$

com número fuzzy triangular.

Exemplo via extensão da solução

A solução equivalente ao PVI crisp do sistema anterior é dada por

$$x(t) = x_0 e^{-at}.$$

Fazendo a extensão da solução, obtemos

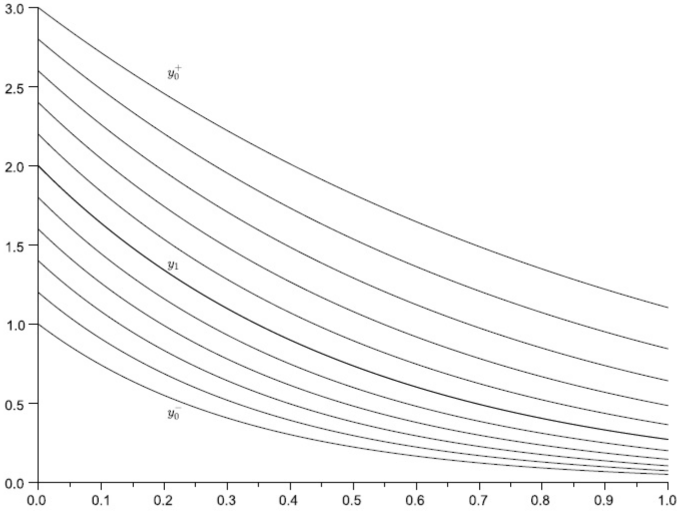
$$x(t) = (1, 2, 3)e^{(1,2,3)t},$$

cujos níveis são escritos como

$$x(t)_r^- = (1 + r)e^{-(3-r)t}$$

$$x(t)_r^+ = (3 - r)e^{-(1+r)t}$$

que existe para $r \in [0, 1]$.



3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
0.0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0
y_0^+
y_1
y_0^-