Derivadas Generalizadas

Luciana Takata Gomes

Departamento de Matemática Aplicada
IMECC - UNICAMP

2013

Diferença de Hukuhara

Dados $u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$

$$u \ominus v = w \iff u = v + w$$

$$[u \ominus v]_r = [u_r^- - v_r^-, u_r^+ - v_r^+]$$

Diferença Generalizada de Hukuhara

Dados $u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$

$$u \ominus_{gH} v = w \iff \begin{cases} & (i) \quad u = v + w \\ ou & (ii) \quad v = u + (-1)w \end{cases}$$

$$[u \ominus_{gH} v]_r = [\min\{u_r^- - v_r^-, u_r^+ - v_r^+\}, \max\{u_r^- - v_r^-, u_r^+ - v_r^+\}]$$

Diferença Generalizada

Dados $u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$

$$[u \ominus_g v]_r = \mathrm{cl} \bigcup_{\beta \geq r} ([u]_\beta \ominus_{gH} [v]_\beta)$$

$$[u \ominus_g v]_r = [\inf_{\beta \geq r} \min\{u_\beta^- - v_\beta^-, u_\beta^+ - v_\beta^+\}, \sup_{\beta \geq r} \max\{u_\beta^- - v_\beta^-, u_\beta^+ - v_\beta^+\}]$$

Derivada de Hukuhara

Dada $f : (a, b) \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, f é Hukuhara diferenciável em x_0 se existir $f'(x_0) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ tal que

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0 + h) \ominus f(x_0)}{h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0) \ominus f(x_0 - h)}{h} = f'(x_0)$$

$$[f'(x_0)]_r = [(f_r^-(x_0))', (f_r^+(x_0))']$$

Derivada Fortemente Generalizada

Dada $f : (a, b) \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, f é diferenciável no sentido fortemente generalizado em x_0 se os limites do par

(i) $$\lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0 + h) \ominus f(x_0)}{h} \text{ and } \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0) \ominus f(x_0 - h)}{h}$$

ou

(ii) $$\lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0) \ominus f(x_0 + h)}{-h} \text{ and } \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0 - h) \ominus f(x_0)}{-h}$$

ou

(iii) $$\lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0 + h) \ominus f(x_0)}{h} \text{ and } \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0 - h) \ominus f(x_0)}{-h}$$

ou

(iv) $$\lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0) \ominus f(x_0 + h)}{-h} \text{ and } \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0) \ominus f(x_0 - h)}{h}$$

existem e são iguais a algum elemento $f'(x_0) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$.

Derivada Fortemente Generalizada

- Duas possibilidades (i) - (iv) podem ocorrer simultaneamente.
- Se f for diferenciável no sentido fortemente generalizado (iii) ou (iv) para todo $x \in (a, b)$, então $f'(x) \in \mathbb{R}$ para todo $x \in (a, b)$.

Derivada Fortemente Generalizada

Exemplo: Seja $c \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ e $g : (a, b) \to \mathbb{R}$. Se g é diferenciável e g' tem um número finito de raízes em (a, b). Então $f(x) = c \cdot g(x)$ é diferenciável no sentido fortemente generalizado em (a, b) e

$$f'(x) = c \cdot g'(x).$$

Derivada Generalizada de Hukuhara

Dada $f : (a, b) \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, f é gH-diferenciável em x_0 se existir $f'(x_0) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ tal que

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) \ominus_{gH} f(x_0)}{h}.$$

Derivada Generalizada de Hukuhara

Dada $f:(a,b)\rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, se f_r^- e f_r^+ são continuamente diferenciáveis com respeito a x, uniformemente com respeito a $r\in[0,1]$, então f é gH-diferenciável se e somente se

a) $(f_r^-)'(x)$ é crescente, $(f_r^+)'(x)$ é decrescente como funções de r e $(f_r^-)'(x)\leq(f_r^+)'(x)$
ou
b) $(f_r^-)'(x)$ é decrescente, $(f_r^+)'(x)$ é crescente como funções de r e $(f_r^-)'(x)\geq(f_r^+)'(x)$.

$$[f'_{gH}(x)]_r=[\min\{(f_r^-(x))',(f_r^+(x))'\},\max\{(f_r^-(x))',(f_r^+(x))'\}]$$

Derivada Generalizada

Dada $f : (a, b) \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, f é g-diferenciável em x_0 se existir $f'(x_0) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ tal que

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) \ominus_g f(x_0)}{h}.$$

Derivada Generalizada

Dada $f : (a, b) \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, se f_r^- e f_r^+ são continuamente diferenciáveis com respeito a x, uniformemente com respeito a $r \in [0, 1]$, então f é g-diferenciável e

$$[f_g'(x_0)]_r = [\inf_{\beta \geq r} \min\{(f_\beta^-(x_0))', (f_\beta^+(x_0))'\}, \sup_{\beta \geq r} \max\{(f_\beta^-(x_0))', (f_\beta^+(x_0))'\}].$$

Derivada Generalizada

Se $f : (a, b) \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ é uniformemente gH-diferenciável em níveis em x_0, então f é g-diferenciável em x_0 e

$$[f'_g(x_0)]_r = \text{cl} \bigcup_{\beta \geq r} (f'_g(x_0))_\beta$$

para todo $r \in [0, 1]$.