Análise Fuzzy - Parte III

Laécio Carvalho de Barros

Departamento de Matemática Aplicada, Universidade de Campinas, Brasil

Integration

Organização da apresentação

1. Integração

2. Diferenciação

Seminário Anterior ...

(Métrica D_∞ de Diamond-Kloeden:) Para todo $u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$

$$D_\infty(u,v) = \sup_{r\in[0,1]} d_H(u_r, v_r) = \sup_{r\in[0,1]} \max\{|u_r^- - v_r^-|, |u_r^+ - v_r^+|\} \tag{1}$$

Espaço FN-type $(C([a,b],\mathbb{R}_{\mathcal{F}}), D)$:

Para todo $f, g \in C([a,b],\mathbb{R}_{\mathcal{F}})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos

- $D(f,g) = \sup\{D_\infty(f(x), g(x)) \,|\, \forall x \in [a,b]\}$;
- $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ e $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, $\forall x \in [a,b]$.

Norma de $f \in (C([a,b],\mathbb{R}_{\mathcal{F}}), D)$

$$||f||_{\mathcal{F}} = D(0, f), \tag{2}$$

onde $0(x) = \mathcal{X}_{\{0\}} \equiv 0$, $\forall x \in [a,b]$.

Integral de Aumann

Uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ é dita ser

- fortemente mensurável se o mapeamento $[f(x)]_\alpha$ (level set mapping) é mensurável para todo $\alpha \in [0, 1]$. (Aqui, mensurável significa Borel mensurável!)
- *integrably bounded* se $\exists\, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que

$$||f(t)||_{\mathcal{F}} \leq h(t),\ \forall t \in [a, b]; \tag{3}$$

- integrável se é *fortemente mensurável* e *integrably bounded*.

Definição (Integral Fuzzy de Aumann)

A integral fuzzy de Aumann de $f : [a, b] \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ é definida $\forall r \in [0, 1]$:

$$\left[(FA) \int_a^b f(x)dx\right]^r = \int_a^b [f(x)]^r dx = \left[\int_a^b f_-^r(x)dx, \int_a^b f_+^r(x)dx\right]. \tag{4}$$

Definição (Integral Fuzzy de Riemann)

Uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ é dita ser Riemann integrável em $[a, b]$ se $\exists\, I \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ que satisfaz a seguinte propriedade: para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ t.q. qualquer divisão $d : a = x_0 < \ldots < x_n = b$ com norma $\nu(d) < \delta$ e quaisquer $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, n-1$, temos que

$$D_\infty\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)\,,\; I\right) < \epsilon. \tag{5}$$

- I é a integral de Rimeann fuzzy de f e é denotada por

$$I = (FR)\int_a^b f(x)dx.$$

Integral de Henstock

Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, $\Delta_n : a = x_0 < \ldots < x_n = b$,
$\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, n-1$, e $\delta : [a, b] \to \mathbb{R}$ t.q. $\delta(x) > 0$.

- $P = (\Delta_n, \xi)$ é dito δ-fine se $[x_i, x_{i+1}] \subseteq (\xi_i - \delta(\xi_i), \xi_i + \delta(\xi_i))$.

Definição (Integral Fuzzy de Henstock)

Uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ é dita ser fuzzy Henstock (HF-)integrável se para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta : [a, b] \to \mathbb{R}$, $\delta(x) > 0$, t.q. para qualquer divisão P δ-fine temos

$$D_\infty \left(\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)\, ,\, I \right) < \epsilon. \tag{6}$$

- I é a integral de Henstock fuzzy de f e é denotada por

$$I = (FH) \int_a^b f(x) dx.$$

Teorema

Uma função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ é fuzzy Aumann, Riemann e Henstock integrável. Além disso,

$$(FA)\int_a^b f(x)dx = (FR)\int_a^b f(x)dx = (FH)\int_a^b f(x)dx. \tag{7}$$

Notação:

A integral fuzzy de uma função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ é denotada por

$$\int_a^b f(x)dx. \tag{8}$$

Teorema

Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ *contínuas e* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *então ...*

- $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx;$
- $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx,$ *para* $c \in [a,b]$;
- $\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx,$ *para* $c \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$.

Multiplicação de conjuntos fuzzy:

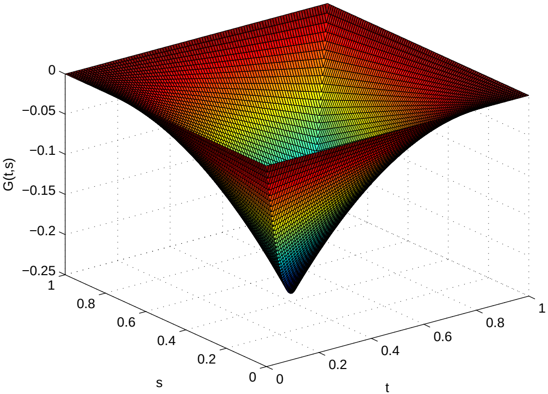
A mutltiplicação de $u \in \mathcal{F}(X)$ e $v \in \mathcal{F}(X)$ é um conjunto fuzzy w dado por

$$\begin{aligned} w_r &= (u \cdot v)_r \\ &= [\min\{u_-^r v_-^r, u_-^r v_+^r, u_+^r v_-^r, u_+^r v_+^r\}, \max\{u_-^r v_-^r, u_-^r v_+^r, u_+^r v_-^r, u_+^r v_+^r\}]. \end{aligned}$$

Um exemplo ...

Considere a função de Green on $[0, 1]$:

$$G(t,s) = \begin{cases} -s(1-t) & , s \leq t \\ -t(1-s) & , s > t \end{cases} \tag{9}$$



Um exemplo ...

Defina $y : [0,1] \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$:

$$\begin{aligned}
y(t) &= \int_0^t G(t,s)(0;1;2)ds + \int_t^1 G(t,s)(0;1;2)ds \\
&= \int_0^t (-2s(1-t); -s(1-t); 0)ds + \\
&\qquad \int_t^1 (-2t(1-s); -t(1-s); 0)ds \\
&= \left(t^2 - t; \frac{1}{2}(t^2 - t); 0\right).
\end{aligned}$$

Diferença de Números Fuzzy

Se $\hat{f}$ é a extensão de Zadeh de $f(x,y) = x - y$, para $x, y \in \mathbb{R}$, então

$$\hat{f}(u,u) = u - u \neq 0, \ \forall u \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \setminus \mathbb{R}.$$

(Diferença de Hukuhara:) Dados $u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$

- $u \ominus_H v = w \Leftrightarrow u = w + v$;
- $u \ominus_H u = 0, \ \forall u \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$;
- Pode não estar definido, e.g., $(0;1;2;3) \ominus_H (0;1;3)$;
- Se existir, $(u \ominus_H v)_r = [u_r^- - v_r^-, u_r^+ - v_r^+]$.

(Diferença Generalizada de Hukuhara:) Dados $u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$

- $u \ominus_{gH} v = w \Leftrightarrow u = w + v$ ou $v = u + (-w)$;
- Se existir,

$$(u \ominus_{gH} v)_r = [\min\{u_r^- - v_r^-, u_r^+ - v_r^+\}, \max\{u_r^- - v_r^-, u_r^+ - v_r^+\}].$$

Diferença Generalizada

Dados $u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. Para todo $\alpha \in [0,1]$ definimos

$$(u \ominus_g v)_\alpha = cl\Big(\bigcup_{\beta \geq \alpha} \mathcal{X}_{u_\beta} \ominus_{gH} \mathcal{X}_{v_\beta} \Big) \tag{10}$$

Está Bem Definido!

$u \ominus_g v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ para todo $u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, e

$$(u \ominus_g v)_\alpha = \Big[\inf_{\beta \geq \alpha} \min\{u_\beta^- - v_\beta^-, u_\beta^+ - v_\beta^+\}, \sup_{\beta \geq \alpha} \max\{u_\beta^- - v_\beta^-, u_\beta^+ - v_\beta^+\} \Big]$$

Diferenciabilidade de Hukuhara

Definição (Derivada de Hukuhara)

Uma função $f : (a, b) \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ é dita Hukuhara Diferenciável se existir $f'(x) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ tal que

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{f(x+h) \ominus_H f(x)}{h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x) \ominus_H f(x-h)}{h} = f'(x), \qquad (11)$$

onde $f'(x)$ é dita a derivada de Hukuhara de f em x.

Definição (Derivada de Seikkala)

Dado $f : (a, b) \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, denfinimos

$$f'(x)_r = [(f_r^-(x))', (f_r^+(x))'], \; 0 \leq r \leq 1, \qquad (12)$$

Se $\{f'(x)_r \mid r \in [0, 1]\}$ formar um número fuzzy $f'(x)$, então $f'(x)$ é a derivada de Seikkala.

Alguns resultados

Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. Se $f_r^-(x)$ e $f_r^+(x)$ são continuamente diferenciáveis, uniformente com respeito à $r \in [0, 1]$, então f é Hukuhara diferenciável $\Leftrightarrow$ f é Seikkala diferenciável. Além disso

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{f(x+h) \ominus_H f(x)}{h} = \left[\lim_{h \searrow 0} \frac{f_r^-(x+h) - f_r^-(x)}{h}, \lim_{h \searrow 0} \frac{f_r^+(x+h) - f_r^+(x)}{h} \right]$$

Se f é uma função Seikkala diferenciável então $f_0^+(x) - f_0^-(x)$ é não decrescente.

Alguns exemplos ...

- Seja $f(t) = (x(t); y(t); z(t))$, se f é Hukuhara diferenciável então

$$f'(t) = (x'(t); y'(t); z'(t));$$

- Se $f(t) = (-e^t; 0; e^t)$ então $f'(t) = (-e^t; 0; e^t)$. Note que

$$f'(t) = f(t) \quad \text{e} \quad f'(t) = -f(t);$$

- Se $f(t) = (e^{-t}; 2e^{-t}; 3e^{-t})$ então f não é Hukuhara diferenciável pois $(-e^{-t}; -2e^{-t}; -3e^{-t})$ não é um número fuzzy!

Mais exemplos ...

Sejam $c \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ e $g : (a, b) \to \mathbb{R}_{+}$ diferenciável em $x_0 \in (a, b)$. Definimos

$$f(x) = g(x)c, \ \forall xin(a, b).$$

- Se $g'(x_0) > 0$ então $f'(x) = g'(x)c$;
- Se $g'(x_0) < 0$ então não é garantido a existência de $f'(x)$, pois pode não existir a diferença de Hukuhara $f(x_0 + h) \ominus_H f(x_0)$.

Perguntas ou Sugestões?

Obrigado!