Análise Fuzzy - Parte II

Laécio Carvalho de Barros
Estevão Esmi Laureano

Departamento de Matemática Aplicada, Universidade de Campinas, Brasil

Fuzzy Analysis

Organização da apresentação

1. Revisão de Alguns Conceitos
2. Norma de um Número Fuzzy
3. Mergulho de $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ em um espaço de Banach
4. Obtendo um Subespaço de $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ Completo e Separável

Seminário Anterior ...

Distância de Hausdorff:

$$d_H(A,B) = \max\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}||a-b||, \sup_{b\in B}\inf_{a\in A}||a-b||\}, \forall A,B \in \mathcal{K}. \quad (1)$$

- Se $A=[a^-,a^+]$ e $B=[b^-,b^+]$ então $d_H(A,B)=\max\{|a^- - b^-|,|a^+ - b^+|\}$.

(Métrica D_∞ de Diamond-Kloeden:) Para todo $u,v\in\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$

$$\begin{aligned} D_\infty(u,v) &= \sup_{r\in[0,1]} d_H(u_r,v_r) && (2)\\ &= \sup_{r\in[0,1]} \max\{|u_r^- - v_r^-|,|u_r^+ - v_r^+|\} && (3)\end{aligned}$$

$$D_p(u,v) = \left(\int_0^1 d_H(u_r,v_r)^p dr\right)^{\frac{1}{p}},\ p\geq 1,\ u,v\in\mathbb{R}_{\mathcal{F}}. \quad (4)$$

Sejam $u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Para todo $r \in [0,1]$ definimos

- Soma: $(u+v)_r = u_r + v_r = [u_r^- + v_r^-, u_r^+ + v_r^+]$;
- Multiplicação por escalar: $(\lambda u)_r = \lambda u_r$.

Teorema (1)

(i) *a soma é comutativa e associativa;*

(ii) $u + 0 = u$, $\forall u \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, *onde* $0 \equiv \mathcal{X}_0$;

(iii) $u \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \setminus \mathbb{R}$ *não possui inverso aditivo!*

(iv) *para* $u \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ *e* $a, b \in \mathbb{R}$, *t.q.* $ab \geq 0$, *temos* $au + bu = (a+b)u$;

(v) $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$, $\forall u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$;

(vi) $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u), \forall u \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ *e* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Diferença de Números Fuzzy

Se $\hat{f}$ é a extensão de Zadeh de $f(x,y) = x - y$, para $x, y \in \mathbb{R}$, então

$$\hat{f}(u,u) = u - u \neq 0, \ \forall u \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \setminus \mathbb{R}.$$

(Diferença de Hukuhara:) Dados $u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$

- $u \ominus_H v = w \Leftrightarrow u = w + v$;
- $u \ominus_H u = 0, \ \forall u \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$;
- Pode não estar definido, e.g., $(0;1;2;3) \ominus_H (0;1;3)$;
- Se existir, $(u \ominus_H v)_r = [u_r^- - v_r^-, u_r^+ - v_r^+]$.

(Diferença Generalizada de Hukuhara:) Dados $u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$

- $u \ominus_{gH} v = w \Leftrightarrow u = w + v$ ou $v = u + (-w)$;
- Se existir,

$$(u \ominus_{gH} v)_r = [\min\{u_r^- - v_r^-, u_r^+ - v_r^+\}, \max\{u_r^- - v_r^-, u_r^+ - v_r^+\}].$$

Dados $u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. Para todo $\alpha \in [0,1]$ definimos

$$(u \ominus_g v)_\alpha = cl\Big(\bigcup_{\beta \geq \alpha} \mathcal{X}_{u_\beta} \ominus_{gH} \mathcal{X}_{v_\beta} \Big) \tag{5}$$

Está Bem Definido!

$u \ominus_g v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ para todo $u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, e

$$(u \ominus_g v)_\alpha = \Big[\inf_{\beta \geq \alpha} \min\{u_\beta^- - v_\beta^-, u_\beta^+ - v_\beta^+\}, \sup_{\beta \geq \alpha} \max\{u_\beta^- - v_\beta^-, u_\beta^+ - v_\beta^+\} \Big]$$

Mais um Pouco do Seminário Anterior ...

Teorema (2)

(i) $(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}, D_\infty)$ *é um espaço métrico* *completo* *mas* *não separável!;*

(ii) D_∞ *é invariante a translação:*

$$D_\infty(u+w, v+w) = D_\infty(u,v),\ \forall u,v,w \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}};$$

(iii) $D_\infty(ku, kw) = |k| D_\infty(u,v),\ \forall u,v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}},\ k \in \mathbb{R};$

(iv) $D_\infty(u+v, w+e) \leq D_\infty(u,v) + D_\infty(w,e),\ \forall u,v,w,e \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}.$

$f : [a,b] \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ é contínua em x_0 se $\forall\, \epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ t.q $D_\infty(f(x), f(x_0)) < \epsilon$ para $|x - x_0| < \delta$.

$$D_\infty(f(x), f(x_0)) = \sup_{r\in[0,1]} \max\{|f_r^-(x) - f_r^-(x_0)|, |f_r^+(x) - f_r^+(x_0)|\} < \epsilon,$$

ou seja, $\{f_r^\pm : [a,b] \to \mathbb{R}\}$ é equicontínua em x_0.

Norma de um Número Fuzzy

Definição

A norma de $u \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ é dada por $||u||_{\mathcal{F}} = D_{\infty}(u, 0)$.

Teorema

- $||u||_{\mathcal{F}} = 0 \Leftrightarrow u = 0$;
- $||\lambda u||_{\mathcal{F}} = |\lambda| ||u||_{\mathcal{F}}, \forall u \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$;
- $||u + v||_{\mathcal{F}} \leq ||u||_{\mathcal{F}} + ||v||_{\mathcal{F}}, \forall u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$;
- $D_{\infty}(u, v) = ||u \ominus_{gH} v||_{\mathcal{F}}, \forall u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ $t.q$ $\exists\, u \ominus_{gH} v$;
- $D_{\infty}(au, bu) = |b - a|\, ||u||_{\mathcal{F}}, \forall u \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ e $b, a \in \mathbb{R}$ $t.q.$ $ab \geq 0$;
- $|\, ||u||_{\mathcal{F}} - ||v||_{\mathcal{F}} \,| \leq D_{\infty}(u, v), \forall u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$.

- Um espaço vetorial normado completo é dito um espaço de Banach;
- $(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}, D_{\infty})$ tem estruturas semelhantes a um espaço de Banach!

Espaço *FN-type*

Definição

Dizemos que $(X, +, \cdot, d)$ é um espaço *FN-type*, se

(i) (X, d) é um espaço métrico e d satisfaz as propriedades do Teo.(2);

(ii) $+, \cdot$ satisfazem as propriedades (i), (iv), (v) e (vi) do Teo. (1);

(iii) existe $0 \in X$ t.q $x + 0 = x$, $\forall x \in X$;

(iv) existe um subespaço $Y \subset X$ (com respeito à $+$ e $\cdot$) não denso em X tal que todo $u \in X \setminus Y$ não possui inverso "aditivo" em X.

$(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}, D_\infty)$ e $(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}, D_p)$ com a soma e produto por escalar clássicos são espaços *FN-type*.

- Neste caso, considera-se $Y = \mathbb{R}$ na propriedade (iv).

Espaço *FN-type*

Sejam K um esp. métrico compacto e $(X, +, \cdot, d)$ um espaço *FN-type*. Considere o conjunto das funções contínuas de K para X, $C(K, X)$, com a soma e produto por excalar definidas ponto-a-ponto, i.e.,

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \text{ e } (\lambda f)(x) = \lambda f(x), \forall x \in K \text{ e } f, g \in C(K, X).$$

Se tomarmos a métrica uniforme, i.e.,

$$D(f, g) = \sup\{d(f(x), g(x)) \,|\, x \in K\}, \forall f, g \in C(K, X),$$

então $(C(K, X), +, \cdot, D)$ é um espaço *FN-type*.

$(C([a, b], \mathbb{R}_{\mathcal{F}}), +, \cdot, D)$ é um espaço *FN-type*, onde

- $0 : [a, b] \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ é dada por $0(x) = 0$, $\forall x \in [a, b]$;
- $||f||_{\mathcal{F}} = \sup\{D(0, f(x)) \,|\, x \in [a, b]\}$;
- $\forall f \in C([a, b], \mathbb{R}_{\mathcal{F}}) \setminus \{f : [a, b] \to \mathbb{R}\}$ não possui inverso aditivo.

Caracterização dos Número Fuzzy

Notação:

- $\overline{C}[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \,|\, f$ é limitada, contínua pela esquerda para $x \in (0,1]$ e contínua pela direita para $x = 0\}$;
- $\mathcal{M} = \{(u^-, u^+) \in \overline{C}[0,1]^2 \,|\,$ tais que u^- e u^+ são, resp., não decrescente e não crescente e $u^-(1) \leq u^+(1)\}$.

- $\overline{C}[0,1]$ é esp. de Banach com $||f|| = \sup\{|f(x)| \,|\, x \in [0,1]\}$;
- $\overline{C}[0,1]$ não é esp. de Banach com $||f||_p = \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$: $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$.
- $\overline{C}[0,1]^2$ é esp. de Banach com $||(f,g)|| = \max\{||f||, ||g||\}$;

Teorema (Teoremas 4.9 e 4.10 do Livro)

Existe uma bijeção $j : \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \to \mathcal{M} \subset \overline{C}[0,1]^2$ *dada por* $j(u) = (u^-, u^+)$, *onde* $u^-(r) = u_r^-$ *e* $u^+(r) = u_r^+$, $\forall r \in [0,1]$, *para todo* $u \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$.

Mergulho de $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ em $\overline{C}[0,1]^2$

Teorema

Seja $j : \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \to \overline{C}[0,1]^2$*, dada por* $j(u) = (u^-, u^+)$*,* $\forall u \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$*. Então,*

- $j(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}) \equiv \mathcal{M}$ *é um cone convexo fechado com vértice em* $0 \in \overline{C}[0,1]^2$;
- *para* $a, b \in \mathbb{R}$ *tais que* $a, b \geq 0$ *e* $u, v \in \mathbb{R}$*, temos que*

$$j(au + bv) = aj(u) + bj(v);$$

- D_∞ *equivale a métrica induzida por* j*, i.e.*

$$D_\infty(u, v) = ||j(u) - j(v)||, \ \forall u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}.$$

Definindo $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}^{C}$....

- $C[0,1]$ denota o espaço das funções reais em $[0,1]$ contínuas;
- $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}^{C} = \{u \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \mid u^{-}, u^{+} \in C[0,1]\}$.

Função de pertinência de $u \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ contínua não implica que $u^{-}, u^{+} \in C[0,1]$, e vice-versa.

Teorema

$\mathbb{R}_{\mathcal{F}}^{C}$ com D_{∞} forma um espaço métrico completo e separável!

Idéia da Prova

- Completude: $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}^{C}$ é subsepaço do espaço completo $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$;
- Separabilidade: $j(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}^{C})$ é um cone convexo fechado de $C[0,1]^2$, que é separável.

Perguntas ou Sugestões?

Obrigado!