MT801 - Tópicos em matemática aplicada

Fuzzy Analysis I

Michael Macedo Diniz

05 de setembro de 2013

Resumo do seminário

1. Definição de Números Fuzzy;

Resumo do seminário

1. Definição de Números Fuzzy;
2. Teorema de Caracterização de Números Fuzzy;

Resumo do seminário

1. Definição de Números Fuzzy;
2. Teorema de Caracterização de Números Fuzzy;
3. Introdução aos espaços métricos de Números Fuzzy;

Resumo do seminário

1. Definição de Números Fuzzy;
2. Teorema de Caracterização de Números Fuzzy;
3. Introdução aos espaços métricos de Números Fuzzy;
4. Completeness, Compactness and Separability.

Definição de Números Fuzzy

Definição

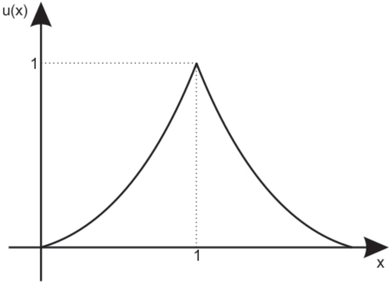
*Considere um subconjunto fuzzy $u : \mathbb{R} \to [0, 1]$. Então u é um **Número fuzzy** se satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *u é normal, isto é, $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ com $u(x_0) = 1$;*
2. *u é fuzzy convexo, isto é, $u(tx + (1 - t)y) \geq \min\{u(x), u(y)\}$;*
3. *u é semicontínuo superior em $\mathbb{R}$;*
4. *u possui suporte compacto, isto é, $cl\{x \in \mathbb{R}; u(x) > 0\}$ é compacto, onde $cl(A)$ denota o fecho do conjunto A.*

Denotamos por $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ o espaço dos **Números fuzzy**.

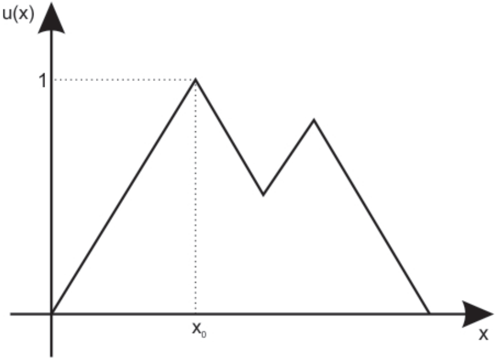
Exemplo de número fuzzy

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0 \\ x^3 & \text{se} \quad 0 \leq x < 1 \\ (2 - x^3) & \text{se} \quad 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{se} \quad x \geq 2 \end{cases}$$



Observação: Todo número real é um Número Fuzzy. Generalizando, todo intervalo real é um número fuzzy.

Exemplo de conjunto fuzzy que não é um número fuzzy



Teorema do empilhamento

Teorema

(Stacking Theorem, Negoita-Ralescu) Se $u \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ *é um número fuzzy e* u_r *são seus conjuntos de nível, então:*

1. u_r *é um intervalo fechado* $u_r = [u_r^-, u_r^+]$*, para qualquer* $r \in [0,1]$*;*
2. *Se* $0 \leq r_1 \leq r_2 \leq 1$*, então* $u_{r_2} \subset u_{r_1}$*;*
3. *Para qualquer sequência* r_n *que converge por baixo para* $r \in (0,1]$ *nos temos*
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} u_{r_n} = u_r;$$
4. *Para qualquer sequência* r_n *que converge por cima para 0 nós temos*
$$cl\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} u_{r_n}\right) = u_0$$

Teorema de Representação de Neigota-Ralescu

Teorema

(Negoita-Ralescu Characterization Theorem) Dada uma familia de subconjuntos $\{M_r : r \in [0,1]\}$ *que satisfaz as condições (i)-(iv)*

1. M_r *é um intervalo fechado não vazio para qualquer* $r \in [0,1]$*;*
2. *Se* $0 \leq r_1 \leq r_2 \leq 1$*, nós temos* $M_{r_2} \subset M_{r_1}$*;*
3. *Para qualquer sequência* r_n *que converge por baixo para* $r \in (0,1]$*, nos temos*
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} M_{r_n} = M_r;$$
4. *Para qualquer sequência* r_n *que converge por cima para 0 nós temos*
$$cl\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_{r_n}\right) = M_0;$$

Então existe um único $u \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ *tal que* $u_r = M_r$*, para qualquer* $r \in [0,1]$*.*

Espaços métricos

Definição

Um espaço métrico (X, d) *é um conjunto* X *munido de uma métrica, isto é, uma função* $d : X \times X \to \mathbb{R}$ *tal que para quaisquer* $x, y, z \in X$

- $d(x, y)$ *é um número real, não negativo e finito;*
- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$*;*
- $d(x, y) = d(y, x)$*;*
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Pseudométrica

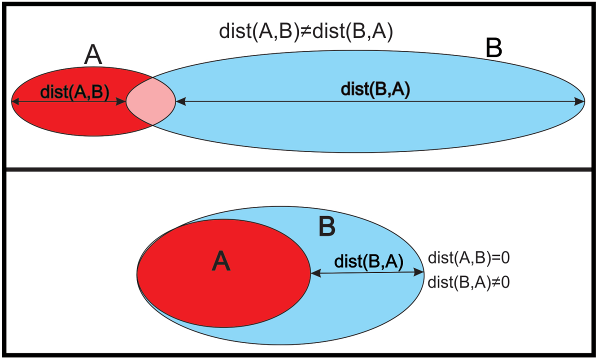
$$dist(A, B) = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \{d(a, b)\} \tag{1}$$

Não é uma métrica pois $dist(A, B) \neq dist(B, A)$

Métrica de Hausdorff

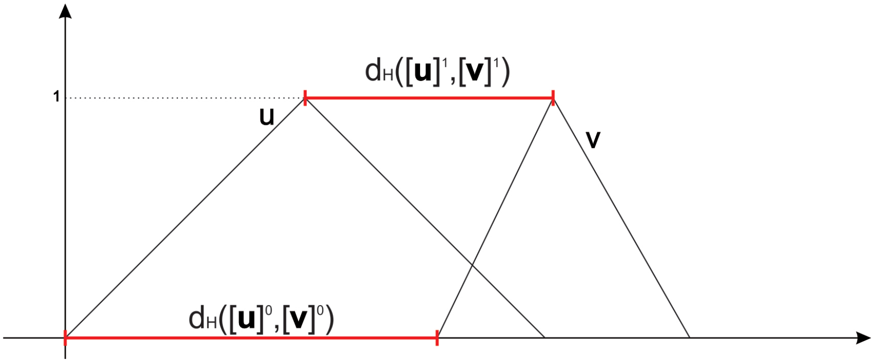
$$d_H(A, B) = \max\{dist(A, B), dist(B, A)\} \tag{2}$$

Métrica de Hausdorff-Pompeiu



Métrica de Hausdorff-Pompeiu

$$D_\infty(u, v) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \{d_H([u^\alpha], [v^\alpha])\} \tag{3}$$



Proposição

1. $(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}, D_\infty)$ *é um espaço métrico;*
2. $D_\infty(u+w, v+w) = D_\infty(u,v), \forall u,v,w \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$;
3. $D_\infty(k.u, k.v) = |k| D_\infty(u,v), \forall u,v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}, \forall k \in \mathbb{R}$;
4. $D_\infty(u+v, w+e) \leq D_\infty(u,w) + D_\infty(v,e), \forall u,v,w,e \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$

Teorema

(Diamond) $(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}, D_{\infty})$ *é um espaço métrico completo.*

- Mostramos que uma sequência de Cauchy arbitrária converge para um conjunto fuzzy e através do teorema de caracterização de Negoita-Ralesco, provamos que este limite é um número fuzzy.
- Nessas condições podemos aplicar por exemplo, o teorema do ponto fixo e consequentemente o Teorema de Picard.

Teorema

(Diamond) $(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}, D_p)$ *não é um espaço métrico completo.*

$$D_p(u,v) = \left(\int_0^1 d_H(u_r, v_r)^p dr \right)^{\frac{1}{p}}$$

Contraexemplo:

$$u_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \notin [0,n] \\ e^{-x} & \text{se} \quad x \in [0,n] \end{cases}$$

Teorema

A bola fechada unitária de $(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}, D_\infty)$ não é compacta

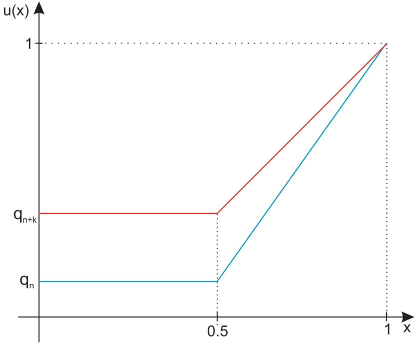
Sequência:

$$u_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \notin [0,1] \\ q_n & \text{se} \quad 0 \leq x < \dfrac{1}{2} \\ 2(1-q_n)x + 2q_n - 1 & \text{se} \quad \dfrac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Conjuntos de nível:

$$(u_n)_r = \begin{cases} [0,1] & \text{se} \quad 0 \leq r \leq q_n \\ \left[\dfrac{r+1-2q_n}{2(1-q_n)}, 1\right] & \text{se} \quad q_n \leq r \leq 1 \end{cases}$$

Nenhuma bola fechada é compacta em D_∞ e portanto, $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ não é localmente compacto.



$$D_\infty(u_n, u_{n+k}) = \frac{q_{n+k} + 1 - 2q_n}{2(1 - q_n)} \geq \frac{1}{2}$$

Teorema

O espaço métrico $(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}, D_p)$ *é separável.*

Teorema

A bola fechada unitária

$$\overline{B}(0,1) = \{u \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} | D_\infty(u,0) \leq 1\}$$

em $(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}, D_\infty)$ *não é separável.*

Observações

- $(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}, D_\infty)$ não é separável;
- Não existe garantia sobre a convergência de sequência de Cauchy em $(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}, D_p)$ para $1 \leq p < \infty$;
- Em $(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}, D_\infty)$ não se pode reduzir problemas para uma dimensão enumerável;
- O espaço $(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}, D_\infty)$ é mais usado na literatura por ser completo e portanto se assemelhar mais com uma estrutura de espaço de Banach.
- Não possui uma estrutura de espaço vetorial e portanto não pode ser espaço de Banach, porém preserva muitas propriedades desse espaço.