Números fuzzy interativos

Francielle Santo Pedro

Orientador: Laécio Carvalho de Barros

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica- IMECC
Unicamp - Campinas

29 de Agosto, 2013

Distribuição de possibilidade

Definição

Uma distribuição de possibilidade sobre $\Omega \neq \Phi$ é uma função $\mu : \Omega \longrightarrow [0, 1]$ satisfazendo $\sup\limits_{\omega \in \Omega} \mu(\omega) = 1$.

Definição

Sejam $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ números fuzzy e $C \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}^n)$, então μ_C é uma distribuição de possibilidade conjunta de $A_1, ..., A_n$ se

$$\max_{x_j \in \mathbb{R}, j \neq i} \mu_C(x_1, x_2, ..., x_n) = \mu_{A_i}(x_i).$$

Além disso, μ_{A_i} é chamada a i-ésima distribuição marginal de C.

Exemplo: Se C denota a distribuição de possibilidade conjunta de $A, B \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, então

$$\max_y \mu_C(x, y) = \mu_A(x) \text{ e } \max_x \mu_C(x, y) = \mu_B(y),$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

Observação

Se C é uma distribuição de possibilidade de $A_1, ..., A_n \in \mathcal{F}_C(\mathbb{R}^n)$, então a seguinte relação é satisfeita

$$\mu_C(x_1, ..., x_n) \leq \min\{\mu_{A_1}(x_1), ..., \mu_{A_2}(x_n)\}$$

e

$$[C]^\alpha \subseteq [A_1]^\alpha \times [A_2]^\alpha \times ... \times [A_n]^\alpha,$$

para todos $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in [0, 1]$.

Interatividade entre números fuzzy

Definição

Os números fuzzy $A_1, A_2, ...A_n$ são ditos não interativos se, e somente se, sua distribuição de possibilidade conjunta C satisfazer

$$\mu_C(x_1, ..., x_n) = \min\{\mu_{A_1}(x_1), ..., \mu_{A_n}(x_n)\},$$

ou equivalentemente,

$$[C]^\alpha = [A_1]^\alpha \times ... \times [A_n]^\alpha, \quad \text{para todo} \quad \alpha \in [0, 1].$$

Caso contrário, são ditos interativos.

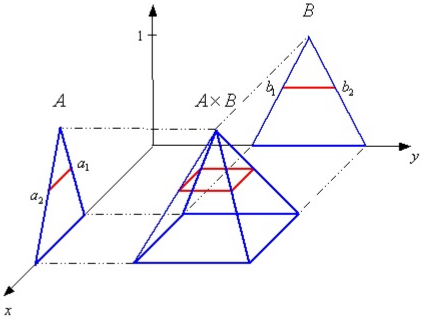

Figura: Números fuzzy não interativos.

O Princípio de extensão para números fuzzy interativos

Definição

Seja C uma distribuição de possibilidade conjunta com distribuições de possibilidades marginais $\mu_{A_1}, ..., \mu_{A_n}$, e seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma função contínua. A extensão, via C, aplicada em $A_1, A_2, ..., A_n$ é o subconjunto fuzzy de $\mathbb{R}^m$, $f_C(A_1, A_2, ..., A_n)$ cuja função de pertinência é

$$\mu_{f_C(A_1,...,A_n)}(y) = \begin{cases} \sup\limits_{y=f(x_1,...,x_n)} \mu_C(x_1, ..., x_n) & \text{se} \quad f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & \text{se} \quad f^{-1}(y) = \emptyset, \end{cases}$$

sendo $f^{-1}(y) = \{(x_1, ..., x_n) : f(x_1, ..., x_n) = y\}$.

Aritmética

Quando $\mu_C(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$ a soma e subtração de dois números fuzzy A e B com α-nívies dados por $[a_1^\alpha, a_2^\alpha]$ e $[b_1^\alpha, b_2^\alpha]$, é dada por:

- A soma de dois números fuzzy A e B é o número fuzzy $A + B$ cujos α-níveis são

$$A + B = [a_1^\alpha + b_1^\alpha, a_2^\alpha + b_2^\alpha].$$

- A diferença de dois números fuzzy A e B é o número fuzzy $A - B$ cujos α-níveis são

$$A - B = [a_1^\alpha - b_2^\alpha, a_2^\alpha - b_1^\alpha].$$

Proposição

Sejam $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ números fuzzy, C sua distribuição de possibilidade conjunta e $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então,

$$[f_C(A_1, A_2, ..., A_n)]^\alpha = f([C]^\alpha),$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Teorema

Sejam $A, B \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ números fuzzy linearmente correlacionados, seja C sua distribuição de possibilidade conjunta e $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma função contínua. Então,

$$[f_C(A, B)]^\alpha = f([C]^\alpha).$$

Números fuzzy linearmente correlacionados

Definição

Dois números fuzzy A e B são ditos linearmente correlacionados se existem $q, r \in \mathbb{R}$, com $q \neq 0$, tais que sua distribuição de possibilidade conjunta é dada por

$$\mu_C(x,y) = \mu_A(x)\mathcal{X}_{\{qx+r=y\}}(x,y) = \mu_B(y)\mathcal{X}_{\{qx+r=y\}}(x,y)$$

sendo

$$\mathcal{X}_{\{qx+r=y\}}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad qx+r=y \\ 0 & \text{se} \quad qx+r\neq y \end{cases}$$

é a função característica da reta $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : qx+r=y\}$.

Neste caso, se $[A]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha]$ então $[B]^\alpha = q[A]^\alpha + r$,
$[C]^\alpha = \{(x, qx+r) \in \mathbb{R}^2 : x = (1-s)a_1^\alpha + sa_2^\alpha, s \in [0,1]\}$, para $\alpha \in [0,1]$
e $\mu_B(x) = \mu_A(\frac{x-r}{q})$, $q \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Observação: Dados q e r, a primeira distribuição marginal determina completamente a segunda, e vice e versa.

Números fuzzy linearmente correlacionados

Definição

Números fuzzy A e B são ditos linearmente positivamente (negativamente) correlacionados se q é positivo (negativo) na definição anterior.

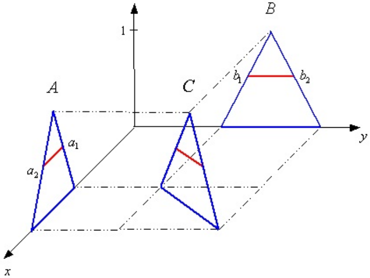

Figura: Números fuzzy linearmente positivamente correlacionados.

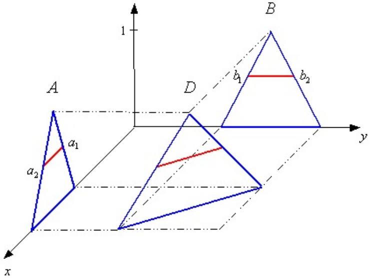

Figura: Números fuzzy linearmente negativamente correlacionados.

Operação aritmética de números fuzzy linearmente correlacionados

Considere a soma de dois números fuzzy linearmente correlacionados A e B,

$$\mu_{A+_C B}(y) = \sup_{y=x_1+x_2} \mu_C(x_1, x_2)$$

Isto é,

$$\mu_{A+_C B}(y) = \sup_{y=x_1+x_2} \mu_A(x_1)\mathcal{X}_{\{qx_1+r=x_2\}}(x_1, x_2).$$

A relação de interativade entre dois números fuzzy é definido exclusivamente por sua distribuição de possibilidade conjunta. Portanto, números fuzzy com função de pertinência iguais, por exemplo $\mu_A(x) = \mu_B(y)$, podem não ser correlacionados.

Soma

Soma de números linearmente correlacionados

$[A +_C B]^\alpha = (q+1)[A]^\alpha + r$, para todo $\alpha \in [0,1]$

Observação

Notemos que se $q = -1$ e $r = 0$, isto é, $\mu_A(x) = \mu_B(-x)$ temos que a soma interativa, $A +_C B$, de dois números fuzzy linearmente negativamente correlacionados será zero (crisp). Por outro lado, a soma não interativa é dada por

$$[A + B]^\alpha = [a_1^\alpha - a_2^\alpha, a_2^\alpha - a_1^\alpha]$$

que é um número fuzzy. Isto significa que para qualquer $\alpha \in [0,1]$,

$$[C]^\alpha \subset \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R} / x_1 + x_2 = r\}.$$

Soma

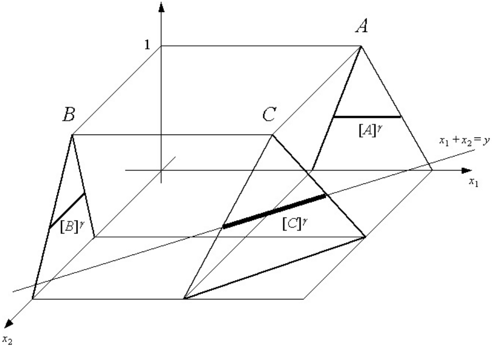

Figura: Adição de números fuzzy linearmente negativamente correlacionados com $q = -1$.

Soma

Por outro lado se $q \neq -1$, $A +_C B$ é um número fuzzy e para qualquer $\alpha \in [0,1]$, o conjunto $\{(x_1, x_2) \in [C]^\alpha / x_1 + x_2 = y\}$ consiste em no máximo de um único ponto.

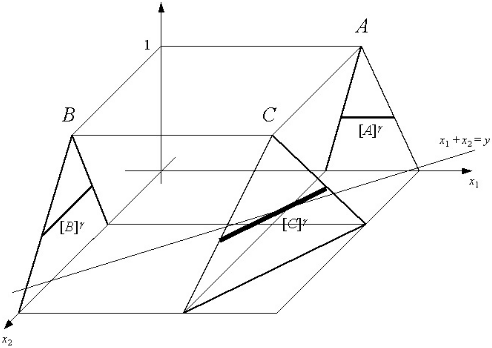

Figura: Números fuzzy linearmente negativamente correlacionados com $q \neq -1$.

Soma interativa = Soma não interativa

Sejam A e B números fuzzy, onde a função de pertinência de B é dada, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, por

$$\mu_B(x) = \mu_A\left(\frac{x - r}{q}\right).$$

Então para qualquer $q > 0$, temos

$$\begin{aligned}
[A + B]^\alpha &= [A]^\alpha + [B]^\alpha \\
&= [A]^\alpha + q[A]^\alpha + r \\
&= (q + 1)[A]^\alpha + r \\
&= [A +_C B]^\alpha.
\end{aligned}$$

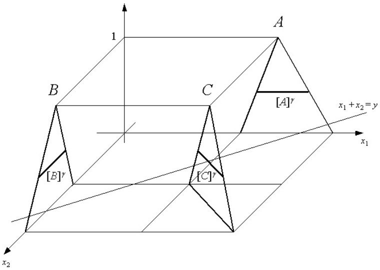

Figura: Soma de números fuzzy linearmente positivamente correlacionados.

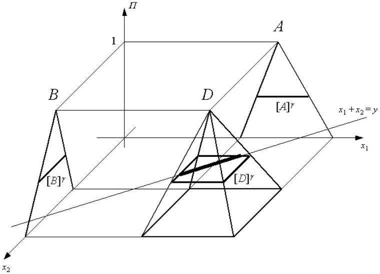

Figura: Números fuzzy não interativos.

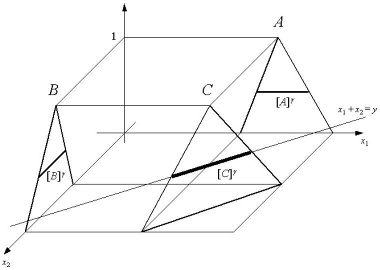

Figura: Soma de números fuzzy linearmente negativamente correlacionados.

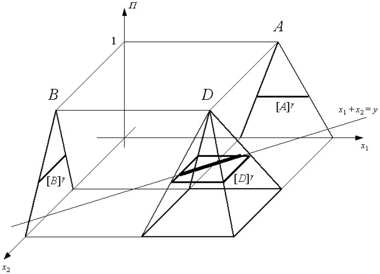

Figura: Números fuzzy não interativos.

Conclusão

Qualquer que seja a distribuição conjunta C, temos

$$A +_C B \subseteq A + B$$

e se dois números são linearmente positivamente correlacionados então

$$[A +_C B]^\alpha = [A + B]^\alpha.$$

Subtração

Considere a subtração de dois números fuzzy linearmente correlacionados A e B,

$$\mu_{A-_C B}(y) = \sup_{y=x_1-x_2} \mu_C(x_1, x_2)$$

Isto é,

$$\mu_{A-_C B}(y) = \sup_{y=x_1-x_2} \mu_A(x_1)\mathcal{X}_{\{qx_1+r=x_2\}}(x_1, x_2).$$

Subtração

Subtração de dois números fuzzy linearmente correlacionados

$[A -_C B]^\alpha = (1 - q)[A]^\alpha - r$, para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Observação

Notemos que se $q = 1$ e $r = 0$, isto é, $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ temos que a subtração interativa, $A -_C B$, de dois números fuzzy linearmente positivamente correlacionados será zero (crisp).

Subtração

Subtração interativa=subtração não interativa

Sejam A e B números fuzzy, onde a função de pertinência de B é dada, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, por

$$\mu_B(x) = \mu_A(\frac{x-r}{q}).$$

Então para qualquer $q < 0$, temos

$$\begin{aligned} [A-B]^\alpha &= [A]^\alpha - [B]^\alpha \\ &= [A]^\alpha - q[A]^\alpha - r \\ &= (1-q)[A]^\alpha - r \\ &= [A -_C B]^\alpha. \end{aligned}$$

Conclusão

Qualquer que seja a distribuição conjunta C, temos

$$A -_C B \subseteq A - B,$$

e se dois números são linearmente negativamente correlacionados então

$$[A -_C B]^\alpha = [A - B]^\alpha.$$

Exemplo

Sejam os números fuzzy A e B com pertinências

$$\mu_A(x_1) = \begin{cases} \frac{x_1+2}{3} & \text{se} \quad -2 \le x_1 \le 1 \\ \frac{4-x_1}{3} & \text{se} \quad 1 \le x_1 \le 4 \end{cases}$$

e

$$\mu_B(x_2) = \begin{cases} \frac{x_2+7}{6} & \text{se} \quad -7 \le x_2 \le -1 \\ \frac{5-x_2}{6} & \text{se} \quad -1 \le x_2 \le 5 \end{cases}.$$

A e B são linearmente correlacionados se tomarmos a distribuição conjunta C com pertinência $\mu_C(x_1, x_2) = \mu_A(x_1)\mathcal{X}_{\{2x_1=x_2\}}(x_1, x_2)$. Daí teremos, $[A]^\alpha = [3\alpha - 2, 4 - 3\alpha]$, $[B]^\alpha = [6\alpha - 4, 8 - 6\alpha]$ e

$$[C]^\alpha = \{(x, 2x) \in \mathbb{R}^2 : x = (1-s)(3\alpha - 2) + s(4 - 3\alpha), s \in [0,1]\}, \quad \text{para} \quad \alpha \in [0,1].$$

Assim,

$$[A +_C B]^\alpha = 3[A]^\alpha = [9\alpha - 6, 12 - 9\alpha] = [A + B]^\alpha.$$

Bibliografia

- Barros, L. C., Bassanezi, R. C., “Tópicos em lógica fuzzy e biomatemática”, UNICAMP/IMECC, Campinas 2010.
- C. Carlsson, R. Fúller, T. Keresztfalvi, Additions of completely correlated fuzzy numbers, *Fuzzy IEEE 2004 CD-ROM Conference Proceedings, Budapest*, Julho (2004) 26-29.