Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

22 de Agosto de 2013

Negação Fuzzy

Definition (Negação Fuzzy)

Uma função não-crescente $N : [0, 1] \to [0, 1]$ é uma negação fuzzy se $N(0) = 1$ e $N(1) = 0$.
N é uma negação estrita se é estritamente decrescente.
Uma negação estrita é uma negação forte se é involutiva, i.e.,

$$N(N(x)) = x.$$

Definition (N-Complemento)

O N-complemento de um conjunto fuzzy $A \in \mathcal{F}(X)$ é o conjunto fuzzy $N(A)$ dado por:

$$N(A)(x) = N(A(x)).$$

Exemplos de Negação Forte:

- Negação Padrão:
$$N(x) = 1 - x.$$
- Negação-λ:
$$N_\lambda(x) = \frac{1 - x}{1 + \lambda x}.$$
- Negação-α:
$$N_\alpha(x) = (1 - x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Theorem (Representação de Negações Fortes)

N é uma negação forte se, e somente se, existe um automorfismo (contínua com inversa contínua) $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ tal que
$$N(x) = \varphi^{-1}(1 - \varphi(x)).$$

Normas Triangulares

Definition (Normas e Conormas Triangulares)

Operadores $T, S : [0,1]^2 \to [0,1]$ que satisfazem as propriedades:

- Comutatividade.
- Associatividade.
- Monotonicidade.
- Identidade:

$$T(1,x) = x \quad \text{e} \quad S(0,x) = x.$$

são chamados respectivamente norma e conorma triangular ou simplesmente t-norma e t-conorma.

Notação:

$$T(x,y) = xTy \quad \text{e} \quad S(x,y) = xSy.$$

Definition (Uninorma)

Um operadores $U : [0,1]^2 \to [0,1]$ que satisfaz as propriedades:

- Comutatividade.
- Associatividade.
- Monotonicidade.
- Identidade:

$$T(e,x) = x, \quad e \in [0,1].$$

é chamado uninorma.

Observação:

Uma uninorma é uma t-norma se $e = 1$ e uma t-conorma se $e = 0$.

União e Intersecção - Tripla de De Morgan

Definition (União e Interseção)

Dados dois conjuntos fuzzy $A, B \in \mathcal{F}(X)$, a união e interseção de A e B são os conjuntos fuzzy ATB e ASB dados por:

$$ATB(x) = A(x)TB(x) \quad \text{e} \quad ASB(x) = A(x)SB(x).$$

Definition (Tripla de De Morgan)

Uma t-norma T, uma t-conorma S e uma negação N formam uma tripla de De Morgan se

$$S(x, y) = N(T(N(x), N(y))).$$

Exemplos de t-normas e t-conormas

- Máximo e mínimo (Gödel):

$$x \vee y = \min\{x, y\} \quad \text{e} \quad x \wedge y = \min\{x, y\}.$$

- Produto e soma probabilística (Goguen):

$$xT_G y = x \cdot y \quad \text{e} \quad xS_G y = x + y - xy.$$

- Lukasiewicz:

$$xT_L y = (x + y - 1) \vee 0 \quad \text{e} \quad xS_L y = (x + y) \wedge 1.$$

- Produto e soma drástica:

$$xT_D y = \begin{cases} x \wedge y, & x \vee y = 1, \\ 0, & \text{c.c.,} \end{cases} \quad \text{e} \quad xS_D y = \begin{cases} x \vee y, & x \wedge y = 0, \\ 1, & \text{c.c..} \end{cases}$$

Propriedade, normas e conormas triangulares Arquimedianas:

Propriedade:

Para quaisquer t-norma T e t-conorma S, vale:

$$T_D \leq T \leq \wedge \quad \text{e} \quad \vee \leq S \leq S_D.$$

Definition (Normas e Conormas triangulares Arquimedianas)

Uma t-norma T e uma t-conorma S são arquimedianas se

$$\lim_{n \to \infty} \underbrace{xTxT \ldots Tx}_{n\text{-vezes}} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n \to \infty} \underbrace{xSxS \ldots Sx}_{n\text{-vezes}} = 1.$$

Representação de normas e conormas triangulares Arquimedianas

Theorem (Representação de normas e conormas triangulares Arquimedianas)

- *Uma t-norma T é Arquimediana se, e somente se, existe uma função $t : [0, 1] \to [0, +\infty)$ estritamente decrescente com $t(1) = 0$ tal que*
$$T(x, y) = t^{-1}\big(\min\{t(x) + t(y), t(0)\}\big).$$
- *Uma t-conorma S é Arquimediana se, e somente se, existe uma função $s : [0, 1] \to [0, +\infty)$ estritamente crescente com $s(0) = 0$ tal que*
$$S(x, y) = s^{-1}\big(\max\{s(x) + s(y), s(0)\}\big).$$

Definition (Implicação Fuzzy)

Um operador $I : [0,1]^2 \to [0,1]$ é uma implicação fuzzy se:

- I é decrescente no primeiro argumento.
- I é crescente no segundo argumento.
- $I(1,0) = 0$ e $I(0,0) = I(1,1) = 1$.

Obs.: Pode-se mostrar que $I(0,1) = 1$.

S-implicações

Definition (S-implicação)

Dadas uma t-conorma S e uma negação forte N, é uma S-implicação:

$$I(x,y) = S(N(x),y).$$

Example

- Kleene-Dienes ($\vee$ e $N(x) = 1 - x$):

$$I(x,y) = (1-x) \vee y.$$

- Reichnbach (produto e $N(x) = 1 - x$):

$$I(x,y) = 1 - x + xy.$$

- Lukasiewicz (Lukasiewicz e $N(x) = 1 - x$):

$$I_L(x,y) = \min\{1 - x + y, 1\}.$$

R-implicações

Definition (Implicações Residuais ou R-implicações)

Dada uma t-norma, o operador

$$I_T(x, y) = \sup\{z : T(x, z) \leq y\},$$

é chamada R-implicação associada a t-norma.

Proposition (Adjunção)

Se T é contínua pela esquerda, então vale a equivalência:

$$T(x, z) \leq y \iff z = I_T(x, y).$$

R-implicações

Example (R-implicações)

- Implicação de Gödel (mínimo):

$$I_{\wedge}(x,y) = \begin{cases} 1, & x \leq y, \\ y, & x > y. \end{cases}$$

- Implicação de Goguen (produto):

$$I_{G}(x,y) = \begin{cases} 1, & x \leq y/x, \\ y, & x > y. \end{cases}$$

- Lukasiewicz:

$$I_{L}(x,y) = \min\{1 - x + y, 1\}.$$

Equivalência Fuzzy

Definition (Equivalência Fuzzy)

Um operador $E : [0,1]^2 \to [0,1]$ é uma equivalência fuzzy se

- $E(x,y) = E(y,x)$.
- $E(0,1) = 0$.
- $E(x,x) = 1$.
- $x \leq u \leq v \leq y$ implica $E(x,y) \leq E(u,v)$.

Theorem (Representação de uma Equivalência Fuzzy)

Um operador E é uma equivalência fuzzy se e somente se existe uma implicação fuzzy I com $I(x,x) = 1$ tal que

$$E(x,y) = \min\{I(x,y), I(y,x)\},$$

ou

$$E(x,y) = I(x \vee y, x \wedge y).$$

Equivalência Fuzzy

Example

Considerando a implicação I_L, temos a equivalência fuzzy:

$$\begin{aligned} E_L(x,y) &= \min\{1-x+y, 1-y+x\} \\ &= 1-\min\{y-x, x-y\} \\ &= 1-|x-y|. \end{aligned}$$

Relações Fuzzy

Definition (Relação Clássica)

Uma relação em X e Y é um subconjunto $R \subset X \times Y$.

Remark

Uma função $f : X \to Y$ é uma relação

$$R(x, y) = 1 \Longleftrightarrow y = f(x).$$

Definition (Relação Fuzzy)

Uma relação fuzzy em X e Y é um subconjunto fuzzy de $X \times Y$, i.e., $R \in \mathcal{F}(X \times Y)$. Em outras palavras, $R : X \times Y \to [0, 1]$.

Remark

O valor $R(x, y) \in [0, 1]$ expressa o grau da relação entre x e y.

Operações Elementares com Relações Fuzzy

Operações de Conjuntos Fuzzy

- O complemento NR de uma relação R é:

$$NR(x,y) = N(R(x,y)).$$

- A união RSP das relações R e P é:

$$RSP(x,y) = R(x,y)SP(x,y).$$

- A intersecção RTP das relações R e P é:

$$RTP(x,y) = R(x,y)TP(x,y).$$

Inversa:

A inversa $R^{-1} \in \mathcal{F}(Y \times X)$ de $R \in \mathcal{F}(X \times Y)$ pode ser definida como:

$$R^{-1}(y,x) = R(x,y).$$

Composição de Relações

Definition (Composição Sup-T (max-t))

Dadas duas relações $R \in \mathcal{F}(X \times Y)$ e $P \in \mathcal{F}(Y \times Z)$, a composição sup-T $R \circ_T P \in \mathcal{F}(X \times Z)$ é a relação dada por:

$$\begin{aligned} R \circ_T P(x,z) &= \sup\{R(x,y) T P(y,z) : y \in Y\} \\ &= \bigvee_{y \in Y} R(x,y) T P(y,z). \end{aligned}$$

Propriedades:

- Associatividade: $(R \circ_T P) \circ_T Q = R \circ_T (P \circ_T Q)$.
- Monotonicidade: $R_1 \leq R_2 \Longrightarrow R_1 \circ_T P \leq R_2 \circ_T P$.
- Distributividade:

$$(R_1 \vee R_2) \circ_T P = (R_1 \circ_T P) \vee (R_2 \circ_T P).$$
$$(R_1 \wedge R_2) \circ_T P \leq (R_1 \circ_T P) \wedge (R_2 \circ_T P).$$

Analogia com Matrizes

Interpretação Matricial

Se $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ e $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$, então podemos identificar $R \in \mathcal{F}(X \times Y)$ com a matriz $R \in [0,1]^{m \times n}$ dada por

$$r_{ij} = R(x_i, y_j).$$

Example (Composição Sup-Min)

Se

$$R = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 & 0.2 \\ 1 & 0 & 0.9 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad S = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.1 & 0 \\ 0.5 & 0.6 \end{pmatrix},$$

então

$$R \circ_{\wedge} S = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 \\ 0.8 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

Composição Inf-S (min-s)

Definition (Composição Min-S)

Dadas duas relações $R \in \mathcal{F}(X \times Y)$ e $P \in \mathcal{F}(Y \times Z)$, a composição inf-S $R \bullet_S P \in \mathcal{F}(X \times Z)$ é a relação dada por:

$$\begin{aligned} R \bullet_S P(x,z) &= \inf\{R(x,y) S P(y,z) : y \in Y\} \\ &= \bigwedge_{y \in Y} R(x,y) S P(y,z). \end{aligned}$$

Dualidade

Se N, T e S formam uma tripla de De Morgan, então:

$$R \bullet_S P = N\big(NR \circ_T NP\big).$$

Equações Relacionais Fuzzy

Problema:

Suponha que conhecemos $R \in \mathcal{F}(X \times Y)$ e $Q \in \mathcal{F}(X \times Z)$ e desejamos encontrar $P \in \mathcal{F}(Y \times Z)$ tal que

$$R \circ_T P = Q.$$

Esse problema pode não ter solução!

Problema - Reformulado:

Sempre existe P tal que

$$R \circ_T P \leq Q. \tag{1}$$

Solução Candidata:

Se T contínua pela esquerda, a maior solução de (1) é:

$$P^* = \sup\{P : R \circ_T P \leq Q\}.$$

Composição Inf$\rightarrow$

Definition (Composição Inf$\rightarrow$ (min$\rightarrow$))

Dadas duas relações $R \in \mathcal{F}(X \times Y)$ e $P \in \mathcal{F}(Y \times Z)$, a composição inf$\rightarrow$ $R \triangleleft P \in \mathcal{F}(X \times Z)$ é a relação dada por:

$$\begin{aligned} R \triangleleft P(x,z) &= \inf\{R(x,y) \rightarrow P(y,z) : y \in Y\} \\ &= \bigwedge_{y \in Y} R(x,y) \rightarrow P(y,z). \end{aligned}$$

Theorem (Adjunção:)

Se T é uma t-norma contínua pela esquerda, então

$$R \circ_T P \leq Q \iff P \leq R^{-1} \triangleleft_T Q.$$

Além disso,

$$R^{-1} \triangleleft_T Q = \sup\{P : R \circ_T P \leq Q\}.$$

Princípio de Extensão de Zadeh

Problema:

Desejamos estender uma função $f : X \to Y$ para $F : \mathcal{F} \to \mathcal{F}(Y)$.

Definition (Princípio de Extensão de Zadeh)

Dados $f : X \to Y$ e $A \in \mathcal{F}(X)$, $B = F(A) \in \mathcal{F}(Y)$ é definido como:

$$B(y) = \sup\{A(x) : x \in X, f(x) = y\}, \quad \forall y \in Y.$$

Observação: $\sup \emptyset = 0$.

Remark

Considerando a relação clássica $R(x, y) = 1 \iff y = f(x)$, temos

$$B(y) = \bigvee_{x \in X} R(x, y) T A(x) \quad \text{ou} \quad B = R \circ_T A.$$