Introdução a Teoria de Conjuntos Fuzzy e suas Extensões

Aluno: Estevão Esmi Laureano
Orientador: Peter Sussner

Departamento de Matemática Aplicada, Universidade de Campinas, Brasil

L-Fuzzy Sets

O que é?

É uma ferramenta para modelar e computar eventos e/ou conceitos cujas fronteiras são nebulosas.

O que é?

É uma ferramenta para modelar e computar eventos e/ou conceitos cujas fronteiras são nebulosas.

Você sabe a diferença entre probabilidade e fuzzy?

O que é?

É uma ferramenta para modelar e computar eventos e/ou conceitos cujas fronteiras são nebulosas.

Você sabe a diferença entre probabilidade e fuzzy?

Qual copo você beberia?

Pertence ao conjunto fuzzy de "copo d'agua potável" com grau de pertinência 0.99.

Probabilidade de ser um copo d'agua potável é 0.99.

Conjunto Fuzzy

Definição (Conjunto Fuzzy)

Um conjunto fuzzy A em X é definido como um mapeamento

$$A : X \to [0,1] \quad \text{(outra notação: } \mu_A : X \to [0,1] \text{),}$$

onde $A(x)$ é o grau de pertinência de x no conjunto fuzzy A.

- A classe dos conjuntos fuzzy é denotada por $\mathcal{F}(X)$;
- $A(x) = 1 \Rightarrow x$ pertence completamente à A;
- $A(x) = 0 \Rightarrow x$ não pertence à A;
- Utilizado para modelar incertezas linguísticas.

Exemplo

- "jovem": $A(x) = \max\{\min\{\frac{40-x}{20}, 1\}, 0\}, \ \forall x \in [0, 100]$;
- "em torno de zero": $A(x) = (1 + x^2)^{-1}, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Algumas Notações para Conjuntos Fuzzy

Se $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ então $A \in \mathcal{F}(X)$ também pode ser denotado por

$$\frac{A(x_1)}{x_1} + \frac{A(x_2)}{x_2} + \ldots + \frac{A(x_n)}{x_n}.$$

- $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ é dita trapezoidal se $\exists a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b \leq c < d$, t.q.

$$A(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & , x \notin [a, b] \\ 1 & , x \notin (b, c) \\ \frac{x-d}{c-d} & , x \notin [c, d] \\ 0 & , \text{c.c.} \end{cases} = \max\left\{\min\left\{\frac{x-a}{b-a}, \frac{x-d}{c-d}, 1\right\}, 0\right\};$$

- Denotamos A por $(a; b; c; d)$;
- Se $b = c$ então A é dita triangular e é denotada por $(a; b; d)$.

Extende Teoria de Conjuntos Clássicos

$\mathcal{F}(X)$ estende $\mathcal{P}(X) = \{Y \subseteq X\}$, pois $Y \subseteq X$ é unicamente identificado por sua função característica: $\mathcal{X}_Y(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in Y \\ 0, & \text{se } x \notin Y \end{cases}$, $\forall x \in X$.

Para $A, B \in \mathcal{F}(X)$, definimos

- Inclusão: $A \leq B \Leftrightarrow A(x) \leq B(x)$, $\forall x \in X$;
- Intersecção: $C = A \wedge B \in \mathcal{F}(X)$ dado por

$$C(x) = \min\{A(x), B(x)\} = A(x) \wedge B(x), \ \forall x \in X;$$

- União: $D = A \vee B \in \mathcal{F}(X)$ dado por

$$D(x) = \max\{A(x), B(x)\} = A(x) \vee B(x), \ \forall x \in X;$$

- Complemento: $\bar{A} \in \mathcal{F}(X)$, onde $\bar{A}(x) = 1 - A(x)$, $\forall x \in X$.

Para todo $A, B, C \in \mathcal{F}(X)$, vale ....

- Associatividade:

$$
\begin{aligned}
A \wedge (B \wedge C) &= (A \wedge B) \wedge C \\
A \vee (B \vee C) &= (A \vee B) \vee C
\end{aligned}
$$

- Comutatividade:

$$
\begin{aligned}
A \wedge B &= B \wedge A \\
A \vee B &= B \vee A
\end{aligned}
$$

- Distributividade:

$$
\begin{aligned}
A \wedge (B \vee C) &= (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \\
A \vee (B \wedge C) &= (A \vee B) \wedge (A \vee C)
\end{aligned}
$$

Lógica Fuzzy

Para todo $A, B, C \in \mathcal{F}(X)$, vale ....

- Idempotência:

$$\begin{aligned} A \wedge A &= A \\ A \vee A &= A \end{aligned}$$

- Elemento Neutro (Identidade):

$$\begin{aligned} A \wedge X &= A \\ A \vee \emptyset &= A \end{aligned}$$

- Elemento de Absorção:

$$\begin{aligned} A \wedge \emptyset &= \emptyset \\ A \vee X &= X \end{aligned}$$

Para todo $A, B, C \in \mathcal{F}(X)$, vale ....

- Involução:

$$\overline{\overline{A}} = A$$

- Regra da Absorção:

$$\begin{aligned} A \wedge (A \vee B) &= A \\ A \vee (A \wedge B) &= A \end{aligned}$$

- Regra de De Morgan:

$$\begin{aligned} \overline{A \wedge B} &= \overline{A} \vee \overline{B} \\ \overline{A \vee B} &= \overline{A} \wedge \overline{B} \end{aligned}$$

Algumas Regras Falham ...

Não vale a regra do meio excluído e da contradição!

Dado $A \in \mathcal{F}(X)$, se exite $x \in X$ tal que $A(x) \in (0, 1)$ então

$$\begin{aligned} A \wedge \overline{A} &\neq \emptyset, \\ A \vee \overline{A} &\neq X. \end{aligned}$$

Conjuntos α-Níveis

Definição (α-Nível)

Seja A um conjunto fuzzy. Os α-níveis de A são

$$A_\alpha = \{x \in X \mid A(x) \geq \alpha\}, \ \forall \alpha \in (0, 1].$$

- A_1 é dito o núcleo de A;
- $\operatorname{supp} A = \{x \in X \mid A(x) > 0\}$ é dito o suporte de A;

Barros & Bassanezi

- $A_0 = \overline{\operatorname{supp} A}$, i.e., o fecho de $\operatorname{supp} A$.
- Um conjunto fuzzy $A : X \to [0, 1]$ pode ser expresso em termos de seus α-níveis:

$$A(x) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \min\{\alpha, \mathcal{X}_{A_\alpha}(x)\}, \ \forall x \in X.$$

$[0,1]$ é um Reticulado Completo!

Definição (Poset)

Se um conjunto X é equipado com uma relação binária "$\leq$" que satisfaz

- Reflexividade: $x \leq x$, $\forall x \in X$;
- Anti-simetria: se $x \leq y$ e $y \leq x$ então $x = y$, onde $x, y \in X$;
- Transitividade: se $x \leq y$ e $y \leq z$ então $x \leq z$, onde $x, y, z \in X$.

Então $(X, \leq)$ é dito um conjunto parcialmente ordenado (poset).

Definição (Reticulado Completo)

Um poset $(\mathbb{L}, \leq)$ é dito um reticulado completo se todo $Y \subseteq \mathbb{L}$ (finito ou infinito) possui ínfimo e supremo em $\mathbb{L}$.

Definição (Negação em $\mathbb{L}$)

Uma negação em um reticulado completo $\mathbb{L}$ é um operador $N : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}$ t.q. $N(N(x)) = x$, $\forall x \in \mathbb{L}$ e $x \leq y \Rightarrow N(y) \leq N(x)$.

Conjuntos $\mathbb{L}$-Fuzzy

Seja $\mathbb{L}$ um reticulado completo

- Um conjunto $\mathbb{L}$-fuzzy em X é um mapeamento $A : X \to \mathbb{L}$;
- A classe dos conjuntos $\mathbb{L}$-fuzzy é denotada por $\mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X)$;
- Para $A, B \in \mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X)$, definimos
  - Inclusão: $A \leq B \Leftrightarrow A(x) \leq B(x)$, $\forall x \in X$;
  - Intersecção: $C = A \wedge B \in \mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X)$ dado por
$$C(x) = \inf\{A(x), B(x)\}, \forall x \in X;$$
  - União: $D = A \vee B \in \mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X)$ dado por
$$D(x) = \sup\{A(x), B(x)\}, \forall x \in X;$$
  - Complemento: $N(A) \in \mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X)$, onde
$$N(A)(x) = N(A(x)), \ \forall x \in X.$$

Extende a Teoria de Conjuntos Clássicos

$\mathbb{L}$ possui um elemento minimal $0_{\mathbb{L}}$ e um maximal $1_{\mathbb{L}}$, i.e.

$$0_{\mathbb{L}} \leq x \leq 1_{\mathbb{L}}, \ \forall x \in \mathbb{L}.$$

Estende $P(X)$:

$Y \subseteq X$ representa o conjunto $\mathbb{L}$-fuzzy dado por

$$\mathcal{X}_Y(x) = \begin{cases} 1_{\mathbb{L}}, & \text{se } x \in Y \\ 0_{\mathbb{L}}, & \text{se } x \notin Y \end{cases}, \ \forall x \in \mathbb{L}.$$

Exemplo (Alguns reticulados completos:)

- $[0,1]$ com a ordem usual dos reais;
- $\mathcal{F}(X)$ e $\mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X)$ com a relação de inclusão;
- Um produto de reticulados completos $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \times \ldots \times \mathbb{L}_n$ com a ordem $\mathbf{x} \leq \mathbf{y} \Leftrightarrow x_i \leq y_i, \ \forall i = 1, \ldots, n$, para $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{L}$.

$\mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X)$ satisfaz ...

- Associatividade;
- Comutatividade;
- Idempotência;
- Elemento Neutro (Identidade);
- Elemento de Absorção;
- Involução;
- Regra da Absorção;

Distributividade

Se o reticulado completo $\mathbb{L}$ é distributivo, i.e.,

$$\begin{array}{rcl} a \vee (b \wedge c) & = & (a \vee b) \wedge (a \vee c) \\ a \wedge (b \vee c) & = & (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \end{array}, \ \forall a, b, c \in \mathbb{L}.$$

Então $\mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X)$ é distributivo.

Regra de De Morgan para $\mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X)$

Um poset $(X, \leq)$ é dito uma corrente ou totalmente ordenado se para todo $x, y \in X$ tem-se $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Exercícios:

1. Se $\mathbb{L}$ satisfaz a regra de De Morgan então $\mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X)$ também satisfaz a regra de De Morgan.
2. Se $\mathbb{L}$ é um produto de reticulados completos $(\mathbb{L}_i, \leq_i)$ tal que $\mathbb{L}_i$ é totalmente ordenado com uma negação N_i para $i = 1, \ldots, n$. Então $\mathbb{L}$ satisfaz a regra de De Morgan.

Alguns exemplos de $\mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X)$ ...

O conjunto $\mathbb{L} = \{(\mu, \nu) \in [0,1]^2 \mid \mu + \nu \leq 1\}$ com a ordem parcial dada por

$$(\mu_1, \nu_1) \leq (\mu_2, \nu_2) \Leftrightarrow \mu_1 \leq \mu_2 \text{ e } \nu_2 \leq \nu_1$$

é um reticulado completo distributivo, onde

$$\begin{aligned} (\mu_1, \nu_1) \wedge (\mu_2, \nu_2) &= (\min\{\mu_1, \nu_1\}, \max\{\mu_2, \nu_2\}) \\ (\mu_1, \nu_1) \vee (\mu_2, \nu_2) &= (\max\{\mu_1, \nu_1\}, \min\{\mu_2, \nu_2\}). \end{aligned}$$

Negação: $N(\mu, \nu) = (\nu, \mu)$, $\forall (\mu, \nu) \in \mathbb{L}$.

- $A : X \to \mathbb{L}$ é dito um conjunto fuzzy intuicionísta;
- utilizamos o símbolo $\mathcal{IFS}(X)$ ao invés de $\mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X)$;
- $\mathcal{IFS}(X)$ é distributivo e satisfaz a regra de De Morgan;
- $\mathcal{F}(X) \subseteq \mathcal{IFS}(X)$, pois $(A, \overline{A}) \in \mathcal{IFS}(X)$, $\forall A \in \mathcal{F}(X)$.

O conjunto $\mathbb{L} = \mathcal{I}[0,1] = \{[\mu,\nu] \subset [0,1]\}$ com a ordem parcial dada por

$$(\mu_1,\nu_1) \leq (\mu_2,\nu_2) \Leftrightarrow \mu_1 \leq \mu_2 \text{ e } \nu_1 \leq \nu_2$$

é um reticulado completo distributivo, onde

$$[\mu_1,\nu_1] \wedge [\mu_2,\nu_2] = [\min\{\mu_1,\nu_1\}, \min\{\mu_2,\nu_2\}]$$

$$[\mu_1,\nu_1] \vee [\mu_2,\nu_2] = [\max\{\mu_1,\nu_1\}, \max\{\mu_2,\nu_2\}]$$

Negação: $N([\mu,\nu]) = [1-\nu, 1-\mu]$, $\forall[\mu,\nu] \in \mathbb{I}[0,1]$.

- $A : X \to \mathcal{I}[0,1]$ é dito um conjunto fuzzy intervalar;
- $\mathcal{IFS}(X) \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{I}[0,1]}(X)$, pois todo $(\mu,\nu) \in [0,1]^2$ t.q. $\mu+\nu \leq 1$ pode ser identificado com o intervalo $[\mu, 1-\nu] \subseteq [0,1]$, de fato

$$\mu+\nu \leq 1 \Rightarrow \mu \leq 1-\nu$$

Alguns exemplos de $\mathcal{F}_{\mathbb{L}}(X)$ ...

Conjuntos Fuzzy Tipo m

Definimos recursivamente:

- Conjuntos Fuzzy Tipo 1: $\mathcal{F}_1(X) = \mathcal{F}(X)$
- Conjuntos Fuzzy Tipo m, para $m > 1$:

$$\mathcal{F}_m(X) = \{A : X \to \mathcal{F}_{m-1}(X)\}.$$

- $\mathcal{F}_2([0,1])$ pode ser relacionado com $\mathcal{F}_{\mathcal{I}[0,1]}(X)$;
- Para $\tilde{A} \in \mathcal{F}_2([0,1])$, obtemos $A \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}[0,1]}(X)$ dado por

$$A(x) = [\inf\{y \in \tilde{A}(x)_0\}, \sup\{y \in \tilde{A}(x)_0\}].$$

Perguntas ou Sugestões?

Obrigado!