UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
MS-680 – Turma A – 2o. Sem. 2013 – 2a. Prova – 18/11/2013

Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
Q5	
$\sum$	

ALUNO	RA

MS-680 – Turma A – 2o. Sem. 2013 – 2a. Prova – 18/11/2013

INSTRUÇÕES

NÃO É PERMITIDO DESTACAR AS FOLHAS DA PROVA

É PROIBIDO O USO DE CALCULADORAS

SERÃO CONSIDERADAS SOMENTE AS QUESTÕES ESCRITAS DE FORMA CLARA E DEVIDAMENTE JUSTIFICADAS

Boa Prova!

Questão 1. Uma forma de combater um tumor consiste em introduzir no paciente um sistema que injeta drogas a taxa constante diretamente na região onde está localizado o câncer. Seja $N = N(t)$ a densidade de células cancerígenas e $C = C(t)$ a concentração de droga na região no instante de tempo t. Suponha que o efeito da droga nas células cancerígenas é dado pela cinética de Michaelis-Mentem, ou seja,

$$K(C) = \frac{K_{max}C}{K_n + C}, \tag{1}$$

em que K_{max} é um limite superior para $K(C)$ e K_n é tal que $K(K_n) = K_{max}/2$. Com base nessa hipótese, podemos formular o seguinte modelo simplificado

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N - K(C)N, \tag{2}$$

$$\frac{dC}{dt} = -\alpha K(C)N - \frac{uC}{V} + \frac{FC_0}{V}, \tag{3}$$

em que

- C_0 é a concentração de drogas no sistema introduzido no paciente.
- F é o fluxo de drogas injetados no paciente pelo sistema.
- V é o volume de sangue na região onde está localizado o sangue.
- u é o fluxo de sangue que deixa a região onde está o câncer.
- λ é a taxa de reprodução do câncer.
- α é a quantidade de drogas absorvidas pelo câncer.

Mostre que as equações acima podem ser escritas na forma adimensional da seguinte forma:

$$\frac{dN}{dt} = N - \alpha_1 \left(\frac{C}{1+C}\right) N, \tag{4}$$

$$\frac{dC}{dt} = -\left(\frac{C}{1+C}\right) N - \alpha_2 C + \alpha_3, \tag{5}$$

Esclareça a relação de α_1, α_2 e α_3 com os parâmetros de (1)-(3).

Questão 2. Esboce, num mesmo gráfico, as isóclinas (*nullclines*), a direção do fluxo sobre essas curvas e os estados estacionários do quimiostato descrito pelas equações adimensionais

$$\frac{dN}{dt} = \alpha_1 \left(\frac{C}{1+C} \right) N - N, \tag{6}$$

$$\frac{dC}{dt} = -\left(\frac{C}{1+C} \right) N - C + \alpha_2, \tag{7}$$

em que N é a densidade de bactérias, C é a concentração de nutrientes e α_1 e α_2 são constantes positivas tais que

$$\alpha_2 > \frac{1}{\alpha_1 - 1}. \tag{8}$$

Questão 3. Determine os estados estacionários do seguinte sistema de equações diferenciais não-lineares autônomo:

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy, \tag{9}$$

$$\frac{dy}{dt} = -cy + dxy, \tag{10}$$

em que a, b, c e d são constantes positivas. Determine também os auto-valores da matriz jacobiana do sistema de equações diferenciais avaliada nos estados estacionários obtidos. Com base nos auto-valores, o que pode ser dito sobre a natureza (atrator, ponto de sela, neutramente estável, etc) dos estados estacionários?

Questão 4. O modelo de Lotka-Volterra para duas espécies em competição é dado pelas equações

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \frac{\kappa_1 - N_1 - \beta_{12} N_2}{\kappa_1}, \tag{11}$$

$$\frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \frac{\kappa_2 - N_2 - \beta_{21} N_1}{\kappa_2}, \tag{12}$$

em que N_1 e N_2 representam as densidades populacional das espécies 1 e 2 e $\kappa_1, \kappa_2, r_1, r_2, \beta_{12}$ e β_{21} são constantes positivas tais que

$$\frac{\kappa_2}{\beta_{21}} < \kappa_1 \quad \text{e} \quad \frac{\kappa_1}{\beta_{12}} > \kappa_2.$$

As duas espécies podem coexistir? Justifique sua resposta.

Questão 5. Considere um lago com peixes atrativos para pesca. Formule e analise um modelo matemático para a interação peixes-pescadores considerando somente as seguintes hipóteses:

1. *Hipóteses sobre os peixes:*
   (a) Na ausência de pescadores, os peixes possuem um crescimento logístico.
   (b) A presença de pescadores reduz o crescimento dos peixes a uma taxa proporcional a ambas populações de peixe e pescador.
2. *Hipóteses sobre os pescadores:*
   (a) Pescadores são atraídos para o lago a uma taxa diretamente proporcional a quantidade de peixes no lago.
   (b) Pescadores são desencorajados de pescar no lago a uma taxa diretamente proporcional ao número de pescadores que já estão pescando no lago.

RASCUNHO

RASCUNHO