LIÇÃO 8

IMAGEM DIRETA E IMAGEM INVERSA

Intuitivamente, uma função $f : A \to B$ corresponde à uma regra que associa cada elemento $x \in A$ à um único elemento $y \in B$. Nesse capítulo estudaremos a generalização da aplicação de f para subconjuntos de A. Estudaremos também a noção de imagem inversa de um conjunto, que pode ser vista como a aplicação da relação inversa sobre um subconjunto no contra-domínio.

8.1 Imagem Direta de um Conjunto

Definição 8.1 (Imagem de um Conjunto)**.** *Dada a função $f : A \to B$ e um subconjunto $X \subseteq A$, chama-se imagem direta de X pela função f ao conjunto $y = f(X)$ formado pelos valores $f(x)$ com $x \in X$. Simbolicamente,*

$$f(X) = \{y \in B : y = f(x), x \in X\}. \tag{8.1}$$

A Figura 8.1 apresenta uma interpretação da imagem de um conjunto $X \subseteq A$ pela função $f : A \to B$.

Observação 8.1. Podemos deduzir as seguintes equivalências lógicas da Definição 8.1:

$$y \in f(X) \Leftrightarrow \exists\, x \in X : y = f(x). \tag{8.2}$$

$$y \notin f(X) \Leftrightarrow \forall x \in X, y \neq f(x). \tag{8.3}$$

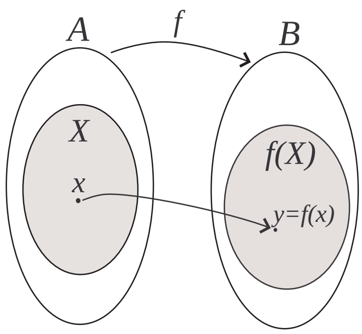

Figura 8.1: Imagem do conjunto $X \subseteq A$ pela função $f : A \to B$.

Exemplo 8.1. Considere os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, e a função $f : A \to B$ dada pela equação $f(x) = x + 1$. Nesse caso, a imagem de A pela função f é o conjunto

$$\begin{aligned} f(A) &= \{f(x) \in B : x \in A\} \\ &= \{f(x) \in B : x \in \{1, 2, 3, 4\}\} \\ &= \{f(1), f(2), f(3), f(4)\} \\ &= \{2, 3, 4, 5\} \end{aligned}$$

Analogamente, a imagem do conjunto $X = \{1, 2\} \subseteq A$ pela função f é:

$$\begin{aligned} f(X) &= \{f(x) \in B : x \in X\} \\ &= \{f(x) \in B : x \in \{1, 2\}\} \\ &= \{f(1), f(2)\} \\ &= \{2, 3\}. \end{aligned}$$

Exemplo 8.2. Considere a função $f : A \to B$, com $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$, dada pela Figura 8.2. Nesse caso, as seguintes equações são verdadeiras:

$$\begin{aligned} f(\{1\}) &= \{f(x) \in B : x \in \{1\}\} = \{f(1)\} = \{4\} \\ f(\{1, 2\}) &= \{f(x) \in B : x \in \{1, 2\}\} = \{f(1), f(2)\} = \{1, 4\} \\ f(\{1, 2, 3\}) &= \{f(x) \in B : x \in \{1, 2, 3\}\} = \{f(1), f(2), f(3)\} = \{1, 4\} \\ f(\{1, 2, 3, 4\}) &= \{f(x) \in B : x \in \{1, 2, 3, 4\}\} = \{1, 2, 4\} \\ f(\{1, 2, 3, 4, 5\}) &= \{f(x) \in B : x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}\} = \{1, 2, 4\} \end{aligned}$$

O seguinte teorema esclarece qual é a imagem do conjunto vazio e do domínio pela função f.

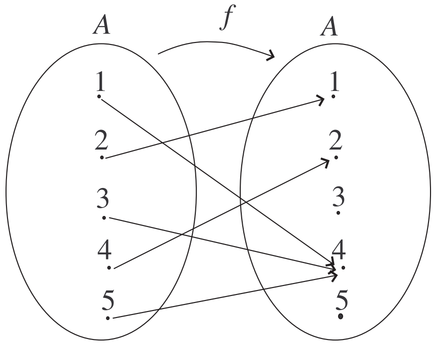

Figura 8.2: Definição da função $f : A \to B$.

Teorema 8.1 (Imagem do Conjunto Vazio e do Domínio)**.** *Para qualquer função $f : A \to B$, tem-se $f(\emptyset) = \emptyset$ e $f(A) = Im(f)$.*

Demonstração. Vamos demostrar, por redução ao absurdo, que $f(\emptyset) = \emptyset$. Nesse caso, temos

$$\begin{cases} \textit{Hipótese:} & f : A \to B \text{ e } f(\emptyset) \neq \emptyset, \\ \textit{Tese:} & \text{Contradição.} \end{cases}$$

Tomando $X = \emptyset$, podemos escrever

$$\begin{cases} \textit{Hipótese:} & f : A \to B, X = \emptyset \text{ e } f(X) \neq \emptyset, \\ \textit{Tese:} & \text{Contradição.} \end{cases}$$

Suponha que $f(\emptyset) \neq \emptyset$. Nesse caso, existe $y \in f(\emptyset)$. Portanto, segue da definição de imagem de um conjunto que existe $x \in X$ tal que $y = f(x)$. Contudo, esse fato é uma contradição pois, por hipótese, $X = \emptyset$. Logo, temos $f(\emptyset) = \emptyset$.

Vamos mostrar agora que $f(A) = Im(f)$, ou seja, $f(A) \subseteq Im(f)$ e $Im(f) \subseteq f(A)$.

Primeiro, vamos considerar a implicação $y \in f(A) \Leftrightarrow y \in Im(f)$. Em outras palavras, temos

$$\begin{cases} \textit{Hipótese:} & y \in f(A), \\ \textit{Tese:} & y \in Im(f). \end{cases}$$

Suponha que $y \in f(A)$. Pela Definição 8.1, existe $x \in A$ tal que $y = f(x)$. Logo $y \in Im(f)$ e, portanto, $f(A) \subseteq Im(f)$.

Vamos considerar agora a implicação $y \in Im(f) \Leftrightarrow y \in f(A)$, ou seja,

$$\begin{cases} \textit{Hipótese:} & y \in Im(f), \\ \textit{Tese:} & y \in f(A). \end{cases}$$

Seja $y \in Im(f)$. Pela definição do conjunto $Im(f)$, existe $x \in A$ tal que $y = f(x)$. Deste modo, temos que $y \in f(A)$. Concluímos portanto que $Im(f) \subseteq f(A)$.

Como ambas relações de inclusão $f(\emptyset) = \emptyset$ e $f(A) = Im(f)$ são verdadeiras, podemos afirmar que $f(A) = Im(f)$. $\square$

Exemplo 8.3. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(x) = 2x$ e os conjuntos $X_1 = [1,2]$ e $X_2 = [-2,-1]$. A imagem de X_1 pela função f é o conjunto:

$$\begin{aligned} f(X_1) &= \{f(x) \in \mathbb{R} : x \in X_1\} \\ &= \{f(x) \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 2\} \\ &= \{f(x) \in \mathbb{R} : 2 \leq 2x \leq 4\} \\ &= \{f(x) \in \mathbb{R} : 2 \leq f(x) \leq 4\} \\ &= [2,4]. \end{aligned}$$

Similarmente, a imagem de X_2 pela função f satisfaz as seguintes equações:

$$\begin{aligned} f(X_2) &= \{f(x) \in \mathbb{R} : x \in X_2\} \\ &= \{f(x) \in \mathbb{R} : -2 \leq x \leq -1\} \\ &= \{f(x) \in \mathbb{R} : -4 \leq 2x \leq -2\} \\ &= \{f(x) \in \mathbb{R} : -4 \leq f(x) \leq -2\} \\ &= [-4,-2]. \end{aligned}$$

A Figura 8.3 apresenta a representação gráfica da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dos conjuntos X_1, X_2 no eixo horizontal e dos conjuntos $f(X_1)$ e $f(X_2)$ no eixo vertical.

Exemplo 8.4. Sejam a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(x) = x^2$ e o conjunto $X = (1,2]$ no domínio de f. A imagem do conjunto X pela função f é determinado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f(X) &= \{y \in \mathbb{R} : y = f(x), x \in X\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : y = x^2, 1 < x \leq 2\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} : 1 < y \leq 4\} \\ &= (1,4]. \end{aligned}$$

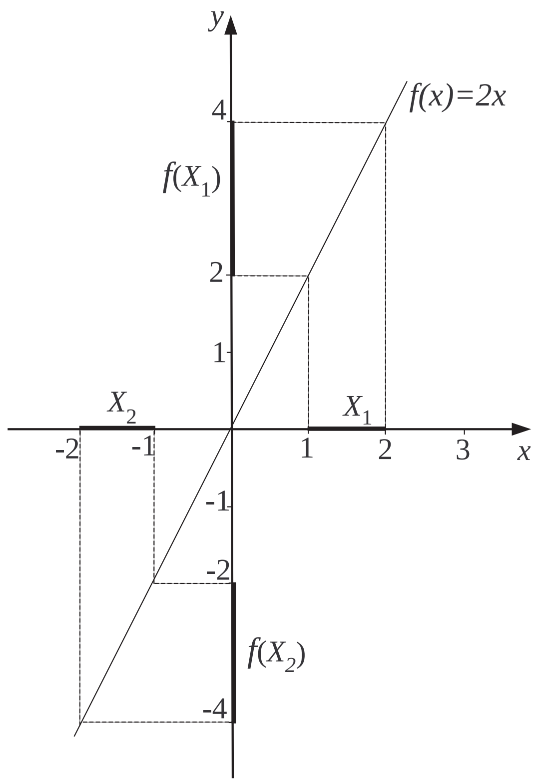

Figura 8.3: Representação gráfica dos conjuntos X_1, X_2, $f(X_1)$ e $f(X_2)$.

A Figura 8.4 apresenta o gráfico de f bem como os conjuntos X e $f(X)$, representados respectivamente nos eixos horizontal e vertical.

Exemplo 8.5. Considere a função $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ dada pela equação $f(x) = \sqrt{x}$. A imagem do conjunto $X = (1, 4)$ pela função f é o conjunto

$$\begin{aligned} f(X) &= \{y \in \mathbb{R}_+ : y = f(x),\ x \in X\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}_+ : y = \sqrt{x},\ 1 < x < 4\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}_+ : 1 < y < 2\} \\ &= (1, 2). \end{aligned}$$

O gráfico de f, bem como a representação dos conjuntos X e $f(X)$, pode ser visualizado na Figura 8.5.

Exemplo 8.6. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ com $f(x) = |x|$ e os conjuntos $X_1 = [1, 2]$ e $X_2 = [-2, -1]$. A imagem de X_1 pela função f é o

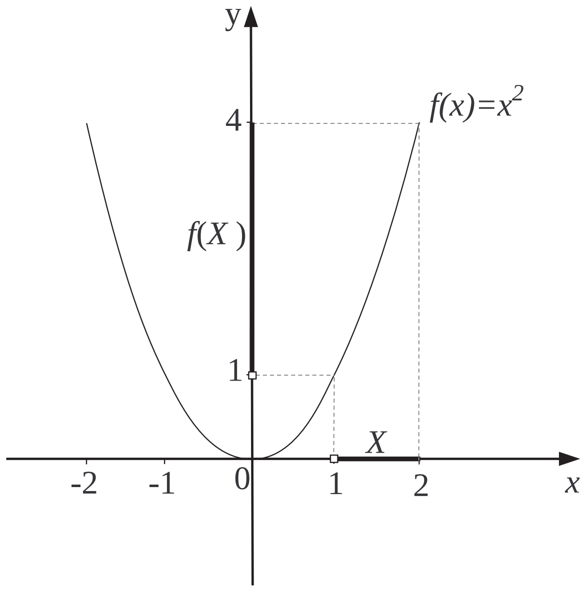

Figura 8.4: Representação gráfica dos conjuntos X e $f(X)$.

conjunto

$$\begin{aligned} f(X_1) &= \{y \in \mathbb{R}_+ : y = f(x),\ x \in X_1\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}_+ : y = |x|,\ 1 \leq x \leq 2\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}_+ : 1 \leq y \leq 2\} \\ &= [1, 2]. \end{aligned}$$

Similarmente, a imagem de X_2 pela função f é o conjunto

$$\begin{aligned} f(X_2) &= \{y \in \mathbb{R}_+ : y = f(x),\ x \in X_2\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}_+ : y = |x|,\ -2 \leq x \leq -1\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}_+ : 1 \leq y \leq 2\} \\ &= [1, 2]. \end{aligned}$$

A Figura 8.6 apresenta o gráfico de f, os conjuntos X_1 e X_2 no eixo horizontal e os conjuntos $f(X_1)$ e $f(X_2)$ nos eixos verticais.

O seguinte teorema estabelece uma relação entre a imagem de um conjunto com as relação de inclusão.

Teorema 8.2 (Relação de Inclusão e Imagem de Conjuntos)**.** *Seja $f : A \to B$ uma função. Se $X_1 \subseteq X_2$, então $f(X_1) \subseteq f(X_2)$.*

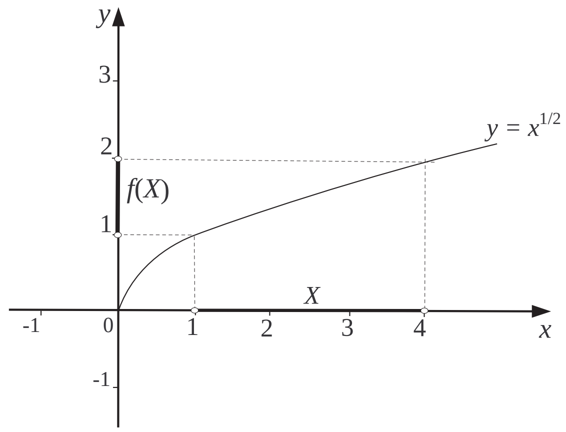

Figura 8.5: Representação gráfica dos conjuntos X e $f(X)$.

Demonstração. Devemos mostrar que $X_1 \subseteq X_2$ implica $f(X_1) \subseteq f(X_2)$. Pela definição de inclusão de conjuntos, o consequente pode ser escrito como: "$y \in f(X_1)$ implica $y \in f(X_2)$". Em outras palavras, temos a seguinte situação:

$$\begin{cases} \textit{Hipótese:} & f : A \to B,\, X_1 \subseteq X_2 \text{ e } y \in f(X_1), \\ \textit{Tese:} & y \in f(X_2). \end{cases}$$

Com efeito, se $y \in f(X_1)$ então existe $x \in X_1$ tal que $y = f(x)$. Contudo, sabemos que $X_1 \subseteq X_2$. Logo, temos que $x \in X_2$ e, consequentemente, $y \in f(X_2)$. Portanto, $f(X_1) \subseteq f(X_2)$. □

Teorema 8.3. *Seja $f : A \to B$ uma função. Se F é uma família de subconjuntos de A, então vale a equação $f(\bigcup_{X \in F} X) = \bigcup_{X \in F} f(X)$.*

Demonstração. Como temos uma igualdade entre conjuntos, dividiremos a demonstração da equação $f(\bigcup_{X \in F} X) = \bigcup_{X \in F} f(X)$ em dois casos. No primeiro caso, além da hipótese que $f : A \to B$ e F é uma família de subconjuntos de A, temos

$$\begin{cases} \textit{Hipótese:} & y \in f(\bigcup_{X \in F} X), \\ \textit{Tese:} & y \in \bigcup_{X \in F} f(X). \end{cases}$$

Suponha que $y \in f(\bigcup_{X \in F} X)$. Pela definição da imagem direta de um conjunto, existe $x_0 \in \bigcup_{X \in F} X$ tal que $y = f(x_0)$. Da definição de união de conjuntos, concluímos que $x_0 \in X_0$ para algum $X_0 \in F$. Além disso, novamente

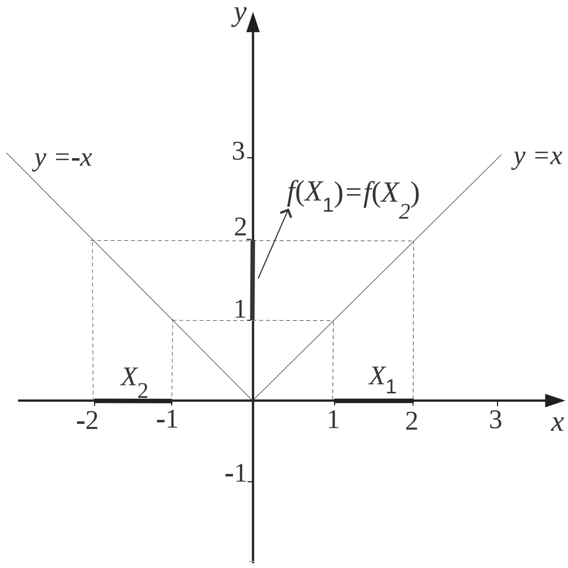

Figura 8.6: Representação gráfica de X_1, X_2, $f(X_1)$ e $f(X_2)$.

da definição de imagem inversa, temos que $y \in f(X_0)$. Consequentemente, $y \in \bigcup\limits_{X \in F} f(X)$ e, portanto, vale a lusão $f(\bigcup\limits_{X \in F} X) \subseteq \bigcup\limits_{X \in F} f(X)$.

Vamos agora mostrar o segundo caso. De modo similar ao caso anterior, da hipótese que $f : A \to B$ e F é uma família de subconjuntos de A, temos

$$\begin{cases} \textit{Hipótese:} & y \in \bigcup\limits_{X \in F} f(X), \\ \textit{Tese:} & y \in f(\bigcup\limits_{X \in F} X). \end{cases}$$

Seja $y \in \bigcup\limits_{X \in F} f(X)$. Pela definição de união de conjuntos, concluímos que $y \in f(X_0)$, para algum subconjunto $X_0 \in F$. Agora, da definição de imagem direta, temos que $y = f(x_0)$ para algum $x_0 \in X_0$. Novamente da definição de união de conjuntos, deduzimos que $x_0 \in\in \bigcup\limits_{X \in F} X$ e, lembrando novamente da definição de imagem direta de um conjunto, concluímos que $y \in f(\bigcup\limits_{X \in F} X)$. Logo, $\bigcup\limits_{X \in F} f(X) \subseteq f(\bigcup\limits_{X \in F} X)$.

Finalmente, combinando os dois casos anteriores, concluímos que ambas relações de inclusão $f(\bigcup\limits_{X \in F} X) \subseteq \bigcup\limits_{X \in F} f(X)$ e $\bigcup\limits_{X \in F} f(X) \subseteq f(\bigcup\limits_{X \in F} X)$ são verdadeiras. Logo, podemos afirmar que $f(\bigcup\limits_{X \in F} X) = \bigcup\limits_{X \in F} f(X)$. $\square$

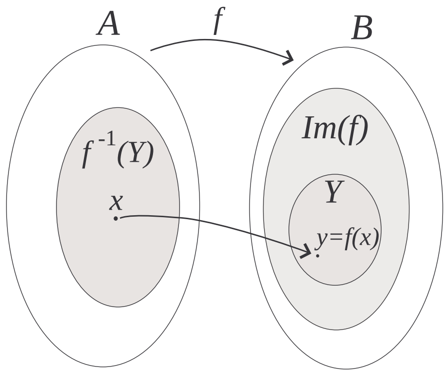

Figura 8.7: Imagem Inversa do conjunto $Y \subseteq B$ pela função $f : A \to B$.

8.2 Imagem Inversa de um Conjunto

Definição 8.2. *Sejam $f : A \to B$ uma função e $Y \subseteq B$, chama-se imagem inversa de Y pela função f ao conjunto $f^{-1}(Y)$ formado por todos os $x \in A$ tais que $f(x) \in Y$. Simbolicamente,*

$$f^{-1}(Y) \quad = \quad \{x \in A : f(x) \in Y\} \tag{8.4}$$

A Figura 8.2 apresenta uma interpretação visual do conjunto $Y \subseteq B$ pela função $f : A \to B$.

Observação 8.2. A partir da Definição 8.2 podemos escrever as seguintes equivalências lógicas:

$$x \in f^{-1}(Y) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in Y. \tag{8.5}$$

$$x \notin f^{-1}(Y) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \notin Y. \tag{8.6}$$

Exemplo 8.7. Considere os conjuntos $A = \{1,2,3,4\}$ e $B = \{1,2,3,4,5\}$, e a função $f : A \to B$ com $f(x) = x + 1$. A Figura 8.8 apresenta uma interpretação visual de $f : A \to B$.

A imagem inversa do conjunto B pela função f é

$$\begin{aligned} f^{-1}(B) &= \{x \in A : f(x) \in B\} \\ &= \{x \in \{1,2,3,4\} : (x+1) \in \{1,2,3,4,5\}\} \\ &= \{1,2,3,4\} \\ &= Dom(f). \end{aligned}$$

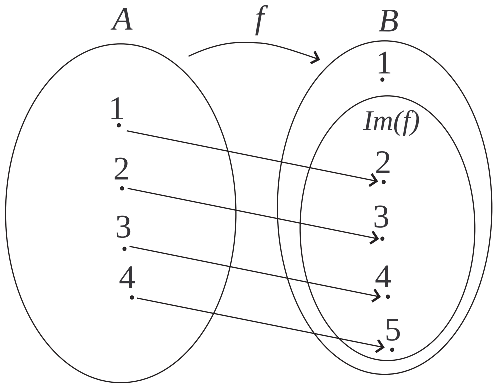

Figura 8.8: Definição da função $f : A \to B$.

De um modo similar, a imagem inversa do conjunto $Y = \{1, 2, 3\} \subseteq B$ pela função f é o conjunto

$$\begin{aligned} f^{-1}(Y) &= \{x \in A : f(x) \in Y\} \\ &= \{x \in \{1, 2, 3, 4\} : (x + 1) \in \{1, 2, 3\}\} \\ &= \{1, 2\} \end{aligned}$$

Observe que podemos determinar a imagem inversa dos conjuntos $\{2\}, \{3\}$ e $\{4\}$. Com efeito, obtemos os conjuntos

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{2\}) &= \{1\} \\ f^{-1}(\{3\}) &= \{2\} \\ f^{-1}(\{4\}) &= \{3\} \\ f^{-1}(\{5\}) &= \{4\} \end{aligned}$$

Podemos também calcular a imagem inversa do conjunto $\{1\}$. Nesse caso, porém, temos

$$f^{-1}(\{1\}) = \emptyset.$$

De fato, sabemos que $\{1\} \cap Im(f) = \emptyset$. Deste modo, para todo $x \in A$, vale a inequação $f(x) \neq 1$. Sendo assim, temos que $f(x) \notin \{1\}$, ou seja, $f^{-1}(\{1\}) = \emptyset$. No caso geral, vale a seguinte proposição cuja interpretação pode ser visualizada na Figura 8.2.

Proposição 8.1. *Sejam $f : A \to B$ uma função e $Y \subseteq B$. Se $Y \cap Im(f) = \emptyset$ então $f^{-1}(Y) = \emptyset$.*

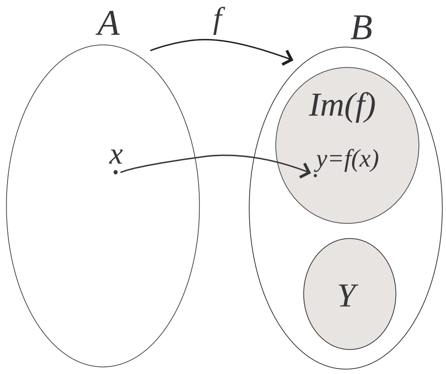

Figura 8.9: $f^{-1}(Y) = \emptyset$ se $Y \cap Im(f) = \emptyset$.

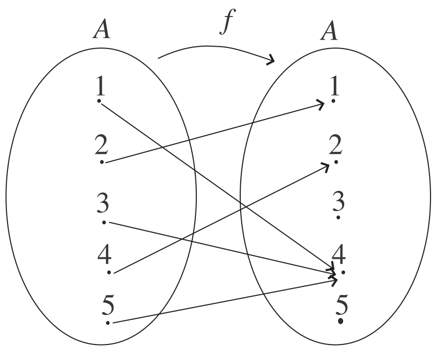

Figura 8.10: Definição da função $f : A \to A$.

Demonstração. Vamos demonstrar essa proposição usando redução ao absurdo, ou seja,

$$\begin{cases} \textit{Hipótese:} & f : A \to B, Y \subseteq B, Y \cap Im(f) = \emptyset \text{ e } f^{-1}(Y) \neq \emptyset, \\ \textit{Tese:} & \text{Contradicao.} \end{cases}$$

De fato, se $f^{-1}(Y) \neq \emptyset$ então existe $x \in f^{-1}(Y)$. Segue da definição de imagem inversa de um conjunto que $f(x) \in Y$ e, como $f(x) \in Im(f)$, concluímos que $f(x) \in Y \cap Im(f)$. Contudo, afirmação $Y \cap Im(f) \neq \emptyset$ é uma contradição pois, por hipótese, $Y \cap Im(f) = \emptyset$. Portanto, pela redução ao absurdo, podemos afirmar que $Y \cap Im(f) = \emptyset$ implica $f^{-1}(Y) = \emptyset$. $\square$

Exemplo 8.8. Considere o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e a função $f : A \to A$ apresentada na Figura 8.10. Note que $Im(f) = \{1, 2, 4\}$ e $\{3, 5\} \cap Im(f) = \emptyset$. Logo, pela Proposição 8.1, concluímos que $f^{-1}(\{3, 5\}) = \emptyset$. Com efeito, podemos verificar que

$$f^{-1}(\{3,5\}) = \{x \in A : f(x) \in \{3,5\}\} = \emptyset.$$

Além disso, temos as seguintes imagens inversas de conjuntos:

$$\begin{aligned}
f^{-1}(\{4\}) &= \{x \in A : f(x) \in \{4\}\} = \{1,3,5\} \\
f^{-1}(\{1,2,3\}) &= \{x \in A : f(x) \in \{1,2,3\}\} = \{2,4\} \\
f^{-1}(\{2,3,4,5\}) &= \{x \in A : f(x) \in \{2,3,4,5\}\} = \{1,3,4,5\} \\
f^{-1}(\{1,2,3,4,5\}) &= \{x \in A : f(x) \in \{1,2,3,4,5\}\} = A
\end{aligned}$$

Exemplo 8.9. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $f(x) = 2x$, cujo gráfico é apresentado na Figura 8.9. A imagem inversa do conjuntos $Y_1 = [2,4]$ pela função f é o seguinte subconjunto do domínio:

$$\begin{aligned}
f^{-1}(Y_1) &= \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in Y_1\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq f(x) \leq 4\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq 2x \leq 4\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 2\} \\
&= [1,2]
\end{aligned}$$

De um modo similar, o seguinte conjunto corresponde à imagem inversa do conjunto $Y_2 = [-4,-2]$ pela função f:

$$\begin{aligned}
f^{-1}(Y_2) &= \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in Y_2\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : -4 \leq f(x) \leq -2\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : -4 \leq 2x \leq -2\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x \leq -1\} \\
&= [-2,-1].
\end{aligned}$$

Além do gráfico da função f, a Figura 8.4 também apresenta no eixo vertical os conjuntos Y_1 e Y_2 e no eixo horizontal os conjuntos $f^{-1}(Y_1)$ e $f^{-1}(Y_2)$.

Exemplo 8.10. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada pela função $f(x) = x^2$. A imagem inversa do conjunto $Y = (1,4]$ pela função f é o conjunto

$$\begin{aligned}
f^{-1}(Y) &= \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in Y\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : 1 < x^2 \leq 4\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : 1 < \sqrt{x^2} \leq 2\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : 1 < |x| \leq 2\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x < -1 \text{ ou } 1 < x \leq 2\} \\
&= [-2,-1) \cup (1,2]
\end{aligned}$$

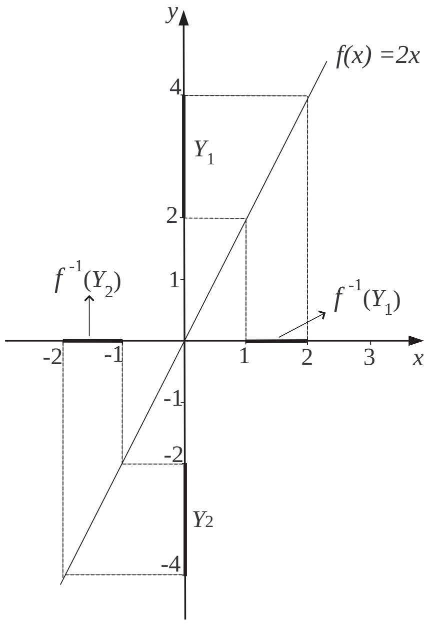

Figura 8.11: Representação gráfica dos conjuntos Y_1, Y_2, $f^{-1}(Y_1)$ e $f^{-1}(Y_2)$.

A Figura 8.10 apresenta o gráfico da função f bem como os conjuntos Y e $f^{-1}(Y)$.

Exemplo 8.11. Dada a função $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ com $f(x) = \sqrt{x}$ e $Y = (1, 2)$. Nesse caso, a imagem inversa do conjunto Y pela função f é

$$\begin{aligned} f^{-1}(Y) &= \{x \in \mathbb{R}_+ : f(x) \in Y\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}_+ : 1 < f(x) < 2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}_+ : 1 < \sqrt{x} < 2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}_+ : 1 < x < 4\} \\ &= (1, 4) \end{aligned}$$

O gráfico da função f e uma interpretação visual dos conjuntos Y e $f^{-1}(Y)$ são apresentados na Figura 8.13.

Exemplo 8.12. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ em que $f(x) = |x|$ e o conjunto $Y = [1, 2]$. Como mostra a Figura 8.12, a imagem inversa de Y pela função f é o conjunto $[-2, -1] \cup [1, 2]$ formado pela união de dois

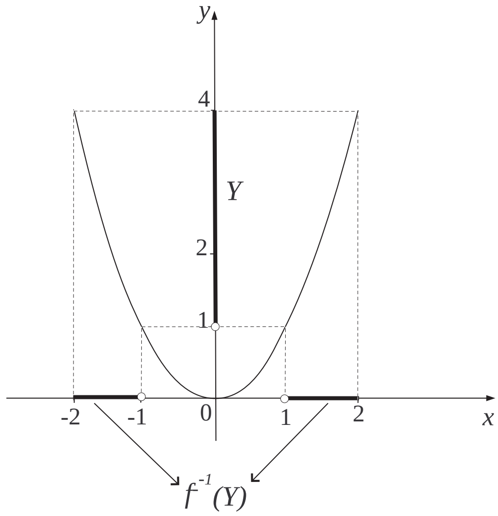

Figura 8.12: Representação gráfica dos conjuntos Y e $f^{-1}(Y)$.

intervalos. Com efeito, valem as seguintes equações:

$$\begin{aligned} f^{-1}(Y) &= \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in Y\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq |x| \leq 2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1 \text{ e } |x| \leq 2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : (x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1) \text{ e } (-2 \leq x \leq 2)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : (-2 \leq x \leq -1) \text{ ou } (1 \leq x \leq 2)\} \\ &= [-2, -1] \cup [1, 2] \end{aligned}$$

O seguinte teorema relaciona o conceito de imagem inversa com a diferença de conjuntos.

Teorema 8.4 (Imagem Inversa da Diferença de Conjuntos)**.** *Seja $f : A \to B$ uma função de A em B. Para quaisquer dois conjuntos $Y_1, Y_2 \subseteq B$ vale a equação $f^{-1}(Y_1 - Y_2) = f^{-1}(Y_1) - f^{-1}(Y_2)$.*

Demonstração. Como temos que demonstrar uma igualdade de conjuntos, a demostração será dividida em dois casos.

Primeiramente, vamos mostrar que $f^{-1}(Y_1 - Y_2) \subseteq f^{-1}(Y_1) - f^{-1}(Y_2)$, ou seja, se $x \in f^{-1}(Y_1 - Y_2) \Rightarrow x \in f^{-1}(Y_1) - f^{-1}(Y_2)$. Em outras palavras, além da hipótese de f ser uma função de A em B e $Y_1, Y_2 \subseteq B$, temos

$$\begin{cases} \textit{Hipótese:} & x \in f^{-1}(Y_1 - Y_2), \\ \textit{Tese:} & x \in f^{-1}(Y_1) - f^{-1}(Y_2). \end{cases}$$

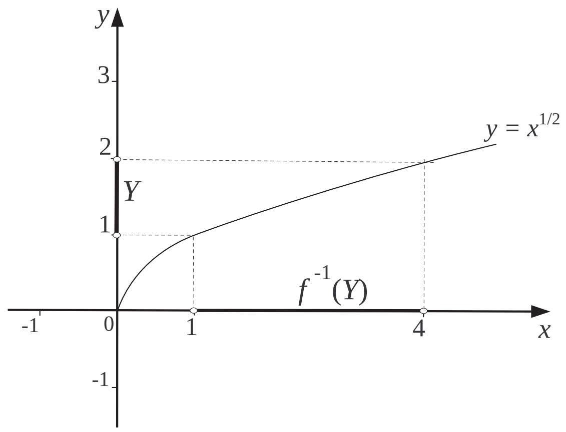

Figura 8.13: Representação gráfica dos conjuntos Y e $f^{-1}(Y)$.

Seja $x \in f^{-1}(Y_1 - Y_2)$. Pela definição da imagem inversa concluímos que $f(x) \in Y_1 - Y_2$. Pela definição de diferença de conjuntos, temos que $f(x) \in Y_1$ e $f(x) \notin Y_2$. Consequentemente, pela definição de imagem inversa, deduzimos que $x \in f^{-1}(Y_1)$ e $x \notin f^{-1}(Y_2)$. Portanto, podemos escrever $x \in f^{-1}(Y_1) - f^{-1}(Y_2)$. Logo, vale a relação de inclusão $f^{-1}(Y_1 - Y_2) \subseteq f^{-1}(Y_1) - f^{-1}(Y_2)$.

Vamos agora mostrar que $f^{-1}(Y_1) - f^{-1}(Y_2) \subseteq f^{-1}(Y_1 - Y_2)$. De um modo similar ao caso anterior, tendo em mente que $f : A \to B$ e $Y_1, Y_2 \subseteq B$, temos que mostrar

$$\begin{cases} \textit{Hipótese:} & x\,\mathrm{inf}^{-1}(Y_1) - f^{-1}(Y_2), \\ \textit{Tese:} & x \in f^{-1}(Y_1 - Y_2). \end{cases}$$

Suponha que $x \in f^{-1}(Y_1) - f^{-1}(Y_2)$. Pela definição de diferença de conjuntos, temos que $x \in f^{-1}(Y_1)$ e $x \notin f^{-1}(Y_2)$. Pela definição de imagem inversa, concluímos que $f(x) \in Y_1$ e $f(x) \notin Y_2$. Sendo assim, podemos escrever $f(x) \in Y_1 - Y_2$, ou ainda, $x \in f^{-1}(Y_1 - Y_2)$. Logo $f^{-1}(Y_1) - f^{-1}(Y_2) \subseteq f^{-1}(Y_1 - Y_2)$.

Combinando as relações de inclusão $f^{-1}(Y_1 - Y_2) \subseteq f^{-1}(Y_1) - f^{-1}(Y_2)$ e $f^{-1}(Y_1) - f^{-1}(Y_2) \subseteq f^{-1}(Y_1 - Y_2)$ demonstradas nos dois parágrafos anteriores, concluímos que $f^{-1}(Y_1 - Y_2) = f^{-1}(Y_1) - f^{-1}(Y_2)$. $\square$

Vamos concluir essa lição apresentando um teorema que relaciona os conceitos de imagem inversa e complemento.

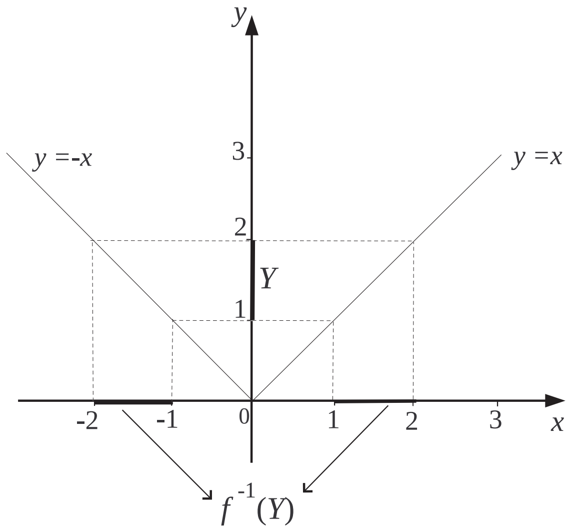

Figura 8.14: Representação gráfica de Y e $f^{-1}(Y)$.

Teorema 8.5. *Seja $f : A \to B$ uma função. A equação*

$$f^{-1}(\complement_B(Y)) = \complement_A(f^{-1}(Y))$$

vale para qualquer subconjunto Y de B.

Demonstração. Observe que temos uma identidade de conjuntos. Portanto, devemos demonstrar que ambas inclusões $f^{-1}(\complement_B(Y)) \subseteq \complement_A(f^{-1}(Y))$ e $\complement_A(f^{-1}(Y)) \subseteq f^{-1}(\complement_B(Y))$ são verdadeiras.

Vamos mostrar primeiro que $f^{-1}(\complement_B(Y)) \subseteq \complement_A(f^{-1}(Y))$, ou seja,

$$\begin{cases} \textit{Hipótese:} & x \in f^{-1}(\complement_B(Y)), \\ \textit{Tese:} & x \in \complement_A(f^{-1}(Y)). \end{cases}$$

Suponha que $x \in f^{-1}(\complement_B(Y))$. Pela definição de imagem inversa, concluímos que $f(x) \in \complement_B(Y)$. Sendo assim, pela definição de complemento, temos que $f(x) \notin Y$. Segue novamente da definição de imagem inversa que $x \notin f^{-1}(Y)$. Finalmente, uma vez que $f^{-1}(Y) \subseteq A$ e $x \in A$, concluímos que $x \in \complement_A(f^{-1}(Y))$. Logo, $f^{-1}(\complement_B(Y)) \subseteq \complement_A(f^{-1}(Y))$.

Vamos demonstrar agora a veracidade de $\complement_A(f^{-1}(Y)) \subseteq f^{-1}(\complement_B(Y))$. Nesse caso, temos

$$\begin{cases} \textit{Hipótese:} & x \in \complement_A(f^{-1}(Y)), \\ \textit{Tese:} & x \in f^{-1}(\complement_B(Y). \end{cases}$$

Suponha $x \in \complement_A(f^{-1}(Y))$. Pela definição de complemento, temos que $x \in A$ e $x \notin f^{-1}(Y)$. Deste modo, pela definição de imagem inversa, podemos afirmar que $f(x) \notin Y$. Como $Y \subseteq B$ e $f(x) \in B$, segue novamente da definição de complemento que, $f(x) \in \complement_B(Y)$. Logo, usando novamente a definição de imagem inversa, concluímos $x \in f^{-1}(\complement_B(Y))$. Como $x \in \complement_A(f^{-1}(Y)) \Rightarrow x \in f^{-1}(\complement_B(Y))$, concluímos que vale a inclusão $\complement_A(f^{-1}(Y)) \subseteq f^{-1}(\complement_B(Y))$.

Finalmente, pelos argumentos apresentados nos dois parágrafos anteriores podemos afirmar que $f^{-1}(\complement_B(Y)) = \complement_A(f^{-1}(Y))$. □

8.3 Exercícios Propostos

Exercício 8.1. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x - 1$. Utilizando as definições de imagem direta e imagem inversa de um conjunto, verifique e apresente uma interpretação visual dos seguintes resultados:

(a) $f([2,4]) = [1,3]$.

(b) $f(\{2,4\}) = \{1,3\}$.

(c) $f^{-1}([2,4]) = [3,5]$.

(d) $f^{-1}(\{2,4\}) = \{3,5\}$.

Exercício 8.2. Dada a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$, verifique e faça as representações gráficas das seguintes afirmações:

(a) $f([1,2]) = [1,4]$.

(b) $f(\{1,2\}) = \{1,4\}$.

(c) $f^{-1}(]1,4[) =]-2,-1[\cup]1,2[$.

(d) $f^{-1}(\{1,4\}) = \{\pm 1, \pm 2\}$.

Exercício 8.3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \mid x \mid -1$:

(a) Mostre que $f([2,3]) = [1,2]$ e faça a representação geométrica desse fato.

(b) Verifique que $f^{-1}(\,]0,1[\,) =]-2,-1[\, \cup \,]1,2[$ e faça a representação geométrica desse fato.

Exercício 8.4. Dada a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = |x+1|$, determine:

(a) $f(\{-1,0,1\})$.

(b) $f(\{10,17\})$.

(c) $f(\,]-2,2[\,)$.

(d) $f(\mathbb{R})$.

(e) $f^{-1}(\{5\})$.

(f) $f^{-1}(\{0\})$.

(g) $f^{-1}(\,]2,4[\,)$.

(h) $f^{-1}([0,1])$.

Exercício 8.5. Dada a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 + 1$, determine:

(a) $f(\{-1,0,1\})$.

(b) $f(\{10,17\})$.

(c) $f(\,]-2,2[\,)$.

(d) $f(\mathbb{R})$.

(e) $f^{-1}(\{5\})$.

(f) $f^{-1}(\{0\})$.

(g) $f^{-1}(\,]2,4[\,)$.

(h) $f^{-1}([10,26])$.

Exercício 8.6. Prove o Teorema A e aplique-o para provar o Teorema B:

(a) **Teorema A** *Sejam* $f : A \to B$ *uma função,* $X_1, X_2 \subset A$. *Então,* $f(X_1 \cap X_2) \subseteq f(X_1) \cap f(X_2)$.

(b) **Teorema B** *Sejam* $f : A \to B$ *uma função injetora,* $X_1, X_2 \subset A$. *Então,* $f(X_1 \cap X_2) = f(X_1) \cap f(X_2)$.

(c) Mostre através de um exemplo que podemos ter

$$f(X_1 \cap X_2) \neq f(X_1) \cap f(X_2)$$

se f não é injetora.

Exercício 8.7. Prove o Teorema C e aplique-o para provar o Teorema D:

(a) **Teorema C** *Sejam* $f : A \to B$ *uma função,* $X_1, X_2 \subset A$. *Então,* $f(X_1) - f(X_2) \subseteq f(X_1 - X_2)$.

(b) **Teorema D** *Sejam* $f : A \to B$ *uma função injetora,* $X_1, X_2 \subset A$. *Então,* $f(X_1 - X_2) = f(X_1) - f(X_2)$.

(c) Mostre apresentando um exemplo que $f(X_1 - X_2) \neq f(X_1) - f(X_2)$ se f não é injetora.

Exercício 8.8. Prove o Teorema E e aplique-o para provar o Teorema F:

(a) **Teorema E** *Sejam $f : A \to B$ uma função e F uma família de subconjuntos de A. Então, $f(\bigcap_{X \in F} X) \subseteq \bigcap_{X \in F} f(X)$.*

(b) **Teorema F** *Sejam $f : A \to B$ uma função injetora, e F uma família de subconjuntos de A. Então, $f(\bigcap_{X \in F} X) = \bigcap_{X \in F} f(X)$.*

Exercício 8.9. Sejam $f : A \to B$ uma função sobrejetora e $Y \subseteq B$ com $Y \neq \emptyset$. Prove que $f^{-1}(Y) \neq \emptyset$.

Exercício 8.10. Mostre que, para qualquer função $f : A \to B$, tem-se $f^{-1}(\complement_B(Im(f))) = \emptyset$.

Exercício 8.11. Mostre que, se $f : A \to B$ é uma função bijetora, então $f(\complement_A(X)) = \complement_B(f(X))$ para qualquer X um subconjunto de A.

Exercício 8.12. Mostre que, para qualquer função $f : A \to B$, valem as equações $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ e $f^{-1}(B) = Dom(f)$.

Exercício 8.13. Sejam $f : A \to B$ e $Y_1, Y_2 \subseteq B$. Mostre que:

(a) se $Y_1 \subseteq Y_2$ então $f^{-1}(Y_1) \subseteq f^{-1}(Y_2)$.

(b) $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$.

(c) $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$.

Exercício 8.14. Sejam $f : A \to B$ uma função e F uma família de subconjuntos de B. Mostre que:

(a) $f^{-1}(\bigcup_{Y \in F} Y) = \bigcup_{Y \in F} f^{-1}(Y)$

(b) $f^{-1}(\bigcap_{Y \in F} Y) = \bigcap_{Y \in F} f^{-1}(Y)$