LIÇÃO 7

FUNÇÃO COMPOSTA E FUNÇÃO INVERSA

Na lição anterior, vimos que uma função é uma relações que satisfaz a seguinte propriedade: qualquer elemento do domínio está associado à um único elemento do contra domínio. Nesta lição, transportaremos os conceitos de composta e inversa de relações para funções. Além disso, estudaremos condições que garantem que o resultado da composta ou a inversa de uma função é também uma função.

7.1 Composta de Funções

Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ duas funções. Essas duas funções podem ser interpretadas respectivamente como relações $f \subseteq A \times B$ e $g \subseteq B \times C$. Dessa forma, podemos definir a relação composta $g \circ f \subseteq A \times C$ como segue:

$$g \circ f = \{(x, z) \in A \times C : \exists y \in B \text{ com } (x, y) \in f \text{ e } (y, z) \in g\} \tag{7.1}$$

O seguinte teorema garante que $g \circ f$ é também uma função.

Teorema 7.1. *Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$, então a relação composta $g \circ f$ dada pela equação* (7.1) *é uma função de A em C.*

Demonstração. Devemos provar que a relação $g \circ f$ de A em C satisfaz as duas condições da Definição 6.1 na lição anterior.

(a) Para todo $x \in A$, existe $z \in D$ tal que $(x,z) \in g \circ f$.

$$\begin{cases} \textit{Hipótese:} & x \in A, \\ \textit{Tese:} & \text{Existe } z \in D \text{ tal que } (x,z) \in g \circ f. \end{cases}$$

Seja $x \in A$. Como f é uma função de A em B, segue que, existe $y \in B$ tal que $(x,y) \in f$. Similarmente, como g é uma função e $y \in B$, existe $z \in C$ tal que $g(y) = z$, isto é, $(y,z) \in g$. Sabendo que $(x,y) \in f$ e $(y,z) \in g$, concluímos que $(x,z) \in g \circ f$.

(b) Se $(x,z_1) \in g \circ f$ e $(x,z_2) \in g \circ f$, então $z_1 = z_2$.

$$\begin{cases} \textit{Hipótese:} & (x,z_1) \in g \circ f \text{ e } (x,z_2) \in g \circ f, \\ \textit{Tese:} & z_1 = z_2. \end{cases}$$

Suponha que $(x,z_1) \in g \circ f$ e $(x,z_2) \in g \circ f$. Segue da definição da relação composta $g \circ f$ que existem $y_1, y_2 \in B$ tais que $\big((x,y_1) \in f \text{ e } (y_1,z_1) \in g\big)$ e $\big((x,y_2) \in f \text{ e } (y_2,z_2) \in g\big)$. Uma vez que $\big((x,y_1) \in f \text{ e } (x,y_2) \in f\big)$ e $f : A \to B$ é uma função, concluímos que $y_1 = y_2$. Deste modo, $(y_1,z_1) \in g$ e $(y_1,z_2) \in g$. Como $g : B \to C$ também é uma função, segue que $z_1 = z_2$.

Combinado os itens (a) e (b), concluímos que a relação $g \circ f$ é uma função de A em C. □

Observe que a função $g \circ f$ pode ser expressa diretamente em termos da aplicação das funções f e g, respectivamente. Com efeito, valem as seguintes equivalências lógicas:

$$(x,y) \in f \quad \Leftrightarrow \quad y = f(x), \tag{7.2}$$

$$(y,z) \in g \quad \Leftrightarrow \quad z = g(y), \tag{7.3}$$

$$(x,z) \in g \circ f \quad \Leftrightarrow \quad z = g \circ f(x). \tag{7.4}$$

Combinando esses fatos com (7.1), concluímos que $z = g \circ f(x)$ se e somente se existe $y \in B$ tal que $f(x) = y$ e $g(y) = z$. Finalmente, identificando os termos iguais a z, podemos formular a seguinte definição:

Definição 7.1 (Função Composta)**.** *Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$. A função $g \circ f : A \to C$ dada pela a equação*

$$g \circ f(x) = g\big(f(x)\big), \quad \forall\, x \in A, \tag{7.5}$$

é denominada de função composta de g por f.

Exemplo 7.1. Considere as funções:

(a) $f : \{a, e, i, o, u\} \to \{1, 2, \ldots, 26\}$ em que $f(a) = 1$, $f(e) = 2$, $f(i) = 3$, $f(o) = 4$, $f(u) = 5$, e

(b) $g : \{1, 2, \ldots, 26\} \to \{a, b, c, \ldots, x, y, z\}$ tal que $g(1) = a$, $g(2) = b$, $g(3) = c, \ldots, g(26) = z$.

A composta $g \circ f$ é uma função de $\{a, e, i, o, u\}$ em $\{a, b, c, \ldots, z\}$ que satisfaz as seguintes equações:

$$\begin{aligned}
g \circ f(a) &= g(f(a)) = g(1) = a\\
g \circ f(e) &= g(f(e)) = g(2) = b\\
g \circ f(i) &= g(f(i)) = g(3) = c\\
g \circ f(o) &= g(f(o)) = g(4) = d\\
g \circ f(u) &= g(f(u)) = g(5) = e
\end{aligned}$$

Note que $Cdom(g) = \{a, b, \ldots, z\} \not\subset \{a, e, i, o, u\} = Dom(f)$, sendo assim, não é possível definir a função $f \circ g$.

Exemplo 7.2. Considere as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $f(x) = 2x$, e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = 2x + 1$. Note que $Cdom(f) = Dom(g)$ e, portanto, teremos a função $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(2x) = 4x + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{7.6}$$

Similarmente, como $Cdom(g) = Dom(f)$, teremos a função $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada pela seguinte equação para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(2x + 1) = 4x + 2. \tag{7.7}$$

Uma vez que $g \circ f(0) = 1$ e $f \circ g(0) = 2$, segue que, $g \circ f \neq f \circ g$. Portanto, a propriedade comutativa da composta de funções não é válida.

Exemplo 7.3. Sejam $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}_+$ tal que $f(x) = x^2$ e $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ dada pela equação $g(x) = \sqrt{x}$. Veja que $Cdom(f) = Dom(g)$, sendo assim, teremos a função $g \circ f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$g \circ f(x) = g\big(f(x)\big) = \sqrt{x^2} = |x|, \quad \forall x \in [-1, 1].$$

Por outro lado, não temos $Cdom(g) = Dom(f)$. Logo, não podemos definir a função $f \circ g$.

Exemplo 7.4. Considere agora $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^2$ e $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x}$. Note que $Cdom(f) = Dom(g)$ e $Cdom(g) = Dom(f)$. Logo, $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f \circ g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ são funções tais que

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \sqrt{x^2} = |x|$$

e

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = (\sqrt{x})^2 = x.$$

Observe que $Dom(g \circ f) \neq Dom(f \circ g)$, bem como $Cdom(f) \neq Cdom(f)$, logo $f \circ g \neq g \circ f$.

Teorema 7.2 (Propriedade Associativa). *Se $f : A \to B$, $g : B \to C$ e $h : C \to D$, então $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.*

Demonstração. Primeiramente, note que ambas $(h \circ g) \circ f$ e $h \circ (g \circ f)$ são funções de A em D. Portanto, devemos apenas mostrar que $(h \circ g) \circ f(x) = h \circ (g \circ f)(x)$ para todo $x \in A$. Em outras palavras, temos:

$$\begin{cases} \textit{Hipótese:} & f : A \to B,\ g : B \to C \text{ e } h : C \to D, \\ \textit{Tese:} & (h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \text{ para todo } x \in A. \end{cases}$$

Seja $x \in A$. Segue da Definição 7.1 que

$$\begin{aligned} (h \circ g) \circ f(x) &= h \circ g\big(f(x)\big) = h\Big(g\big(f(x)\big)\Big) = h\big(g \circ f(x)\big) && (7.8) \\ &= h \circ (g \circ f)(x) && (7.9) \end{aligned}$$

Portanto as funções $(h \circ g) \circ f$ e $h \circ (g \circ f)$ são iguais e, consequentemente, é válida a propriedade associativa. $\square$

Teorema 7.3 (Composta de Funções Bijetoras). *Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções bijetoras, então a função composta $g \circ f : A \to C$ também é bijetora.*

Demonstração. Devemos provar que a função $g \circ f : A \to C$, satisfaz as seguintes condições:

(a) *Injetora:* Para todos $x_1, x_2 \in A$, se $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$, então $x_1 = x_2$. Em outras palavras, temos:

$$\begin{cases} \textit{Hipótese:} & g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2), \\ \textit{Tese:} & x_1 = x_2. \end{cases}$$

Sejam $x_1, x_2 \in A$ e suponha que $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$, ou seja,

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2)).$$

Sendo g injetora, segue que $f(x_1) = f(x_2)$. Similarmente, uma vez que f é injetora, concluímos que $x_1 = x_2$. Logo, $g \circ f$ é injetora.

(b) *Sobrejetora*: Dado $z \in C$ existe $x \in A$ tal que $g \circ f(x) = z$. Em outras palavras, temos:

$$\begin{cases} \textit{Hipótese:} & z \in C, \\ \textit{Tese:} & \text{Existe } x \in A \text{ tal que } g \circ f(x) = z. \end{cases}$$

Suponha que $z \in C$. Como $g : B \to C$ é sobrejetora, segue que existe $y \in B$ tal que $g(y) = z$. Do mesmo modo, como $f : A \to B$ é sobrejetora, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Deste modo, para esse $x \in A$, valem as equações

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = z. \tag{7.10}$$

Portanto, a função $g \circ f : A \to C$ é sobrejetora.

Por (a) e (b), concluímos que a função $g \circ f : A \to C$ é bijetora. □

7.2 Inversa de uma Função

Lembrando novamente que uma função $f : A \to B$ é uma relação e que, para cada relação podemos associar a relação inversa, concluímos que podemos associar à f uma relação chamada *inversa da função* f e denotada por $f^{-1} \subseteq B \times A$. Formalmente, a inversa da função $f : A \to B$ é a relação dada por:

$$f^{-1} = \{(y, x) \in B \times A : f(x) = y\}. \tag{7.11}$$

É importante observar que podemos falar da inversa de qualquer função. Contudo, a inversa de uma função nem sempre é também uma função. O seguinte teorema garante que a inversa de uma função bijetora é também uma função. Além disso, a recíproca também é verdadeira, ou seja, se a inversa de f é uma função, então f é bijetora.

Teorema 7.4 (Inversa de Função Bijetora)**.** *Seja $f : A \to B$ uma função e f^{-1} a relação inversa de f. Tem-se $f^{-1} : B \to A$ se, e somente se, f é bijetora.*

Demonstração. Observe que esse teorema contém uma equivalência lógica. Portanto, devemos mostrar que:

($\Rightarrow$) Se $f^{-1} : B \to A$ é uma função, então f é bijetora. Para deixar a demonstração mais clara, mostremos primeiro que a função f é injetora. Depois, mostraremos que f é sobrejetora.

(a) Vamos mostrar que f é injetora.

$$\begin{cases} \textit{Hipótese:} & f(x_1) = f(x_2) = y, \\ \textit{Tese:} & x_1 = x_2. \end{cases}$$

Sejam $x_1, x_2 \in A$ e suponha que $f(x_1) = f(x_2) = y$. Deste modo, $(x_1, y) \in f$ e $(x_2, y) \in f$, consequentemente, $(y, x_1) \in f^{-1}$ e $(y, x_2) \in f^{-1}$. Como f^{-1} é uma função de B em A, segue que, $x_1 = x_2$. Logo f é injetora.

(b) Vamos mostrar agora que f é sobrejetora:

$$\begin{cases} \textit{Hipótese:} & y \in B, \\ \textit{Tese:} & \text{Existe } x \in A \text{ tal que } f(x) = y. \end{cases}$$

Seja $y \in B$. Sendo $f^{-1} : B \to A$ uma função, concluímos que existe $x \in A$ tal que $(y, x) \in f^{-1}$. Deste modo, $(x, y) \in f$ e, consequentemente, $f(x) = y$. Logo f é sobrejetora.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, vamos mostrar que se f é bijetora, então a relação inversa $f^{-1} \subseteq B \times A$ é uma função. Especificamente, mostraremos que f^{-1} satisfaz as duas propriedades da Definição 6.1.

(a) Para todo $y \in B$, existe $x \in A$ tal que $(y, x) \in f^{-1}$.

$$\begin{cases} \textit{Hipótese:} & y \in B, \\ \textit{Tese:} & \text{Existe } x \in A \text{ tal que } (y, x) \in f^{-1}. \end{cases}$$

Seja $y \in B$. Como f é sobrejetora, existe $x \in A$ tal que $y = f(x)$, ou seja, $(x, y) \in f$. Sendo assim, $(y, x) \in f^{-1}$.

(b) Se $(y, x_1) \in f^{-1}$ e $(y, x_2) \in f^{-1}$ então $x_1 = x_2$.

$$\begin{cases} \textit{Hipótese:} & (y, x_1) \in f^{-1} \text{ e } (y, x_2) \in f^{-1}, \\ \textit{Tese:} & x_1 = x_2. \end{cases}$$

Suponha que $(y, x_1) \in f^{-1}$ e $(y, x_2) \in f^{-1}$. Deste modo, $(x_1, y) \in f$ e $(x_2, y) \in f$. Logo $f(x_1) = y$ e $f(x_2) = y$, ou seja, $f(x_1) = f(x_2)$. Como f é injetora, segue que, $x_1 = x_2$.

$\square$

Apresentaremos a seguir quatro lemas apresentado condições necessárias ou suficientes para uma função ser injetora ou sobrejetora.

Lema 7.1. *Se $f : A \to B$ é injetora, então existe uma função $g : B \to A$ tal que $g \circ f = I_A$.*

Demonstração. A demostração desse lema se dá apresentado uma função g tal que $g \circ f = I_A$. Para tanto, considere um ponto arbitrário $x_0 \in A$ e defina $g : B \to A$ como segue para todo $y \in B$:

$$g(y) = \begin{cases} x, & \text{com } f(x) = y, \text{ se } y \in Im(f), \\ x_0, & \text{se } y \notin Im(f). \end{cases} \tag{7.12}$$

Observe que g está definida para todo $y \in B$. Com efeito, apenas um dos dois casos $y \in Im(f)$ ou $y \notin Im(f)$ vale e ambos são contemplados em (7.12). Além disso, não temos $g(y) = x_1$ e $g(y) = x_2$ com $x_1 \neq x_2$. De fato, por um lado, se $y \notin Im(f)$, então necessariamente temos $g(y) = x_0$ (não há duas possibilidades nesse caso). Por outro lado, se $y \in Im(f)$ é tal que $g(y) = x_1$ e $g(y) = x_2$ então, por (7.12), concluímos que $f(x_1) = y$ e $f(x_2) = y$. Contudo, a função f é injetora por hipótese e, portanto, $x_1 = x_2$.

Finalmente, vamos verificar que $g \circ f = I_A$. Com efeito, dado $x \in A$ qualquer, defina $y = f(x)$. Note que $y \in Im(f)$ e, portanto, tem-se

$$g \circ f(x) = g\big(f(x)\big) = g(y) = x = I_A(x).$$

Como a equação $g \circ f(x) = I_A(x)$ vale para qualquer $x \in A$, concluímos que $g \circ f = I_A$. $\square$

Lema 7.2. *Seja f uma função de A em B. Se existe uma função $g : B \to A$ tal que $g \circ f = I_A$ então f é injetora.*

Demonstração. Vamos supor que uma função $g : B \to A$ tal que $g \circ f = I_A$ e mostraremos que f é injetora. Especificamente, temos a seguinte situação:

$$\begin{cases} \textit{Hipótese:} & g : B \to A \text{ tal que } g \circ f = I_A \text{ e } f(x_1) = f(x_2), \\ \textit{Tese:} & x_1 = x_2. \end{cases}$$

Sejam $x_1, x_2 \in A$ e suponha que $f(x_1) = f(x_2)$. Uma vez que g é uma função de B em A e $f(x_1), f(x_2) \in B$, concluímos que valem as seguintes equivalências lógicas:

$$\begin{aligned} g(f(x_1)) = g(f(x_2)) &\Leftrightarrow g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \\ &\Leftrightarrow I_A(x_1) = I_A(x_2) \\ &\Leftrightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

Portanto, $f : A \to B$ é uma função injetora. □

Lema 7.3. *Se $f : A \to B$ é uma função sobrejetora, então existe uma função $g : B \to A$ tal que $f \circ g = I_B$.*

Lema 7.4. *Seja f uma função de A em B. Se existe uma função $g : B \to A$ tal que $f \circ g = I_B$ então f é sobrejetora.*

A demostração dos Lemas 7.3 e 7.4 são similares as demonstrações dos Lemas 7.1 e 7.2, respectivamente, e serão deixadas como exercícios.

Teorema 7.5. *Seja f uma função de A em B. Existe uma função $g : B \to A$ tal que $g \circ f = I_A$ e $f \circ g = I_B$ se, e somente se, f é bijetora.*

Demonstração. Como esse teorema contém uma equivalência lógica, sua demonstração será divida em duas partes.

($\Rightarrow$) Se existe uma função $g : B \to A$ tal que $g \circ f = I_A$ e $f \circ g = I_B$, então f é bijetora. Em outras palavras, temos que

$$\begin{cases} \textit{Hipótese:} & \text{Existe } g : B \to A \text{ tal que } g \circ f = I_A \text{ e } f \circ g = I_B, \\ \textit{Tese:} & f \text{ é injetora e sobrejetora.} \end{cases}$$

Suponha que exista a função $g : B \to A$ tal que $g \circ f = I_A$ e $f \circ g = I_B$. Pelos Lemas 7.2 e 7.4, concluímos que f é injetora e sobrejetora, ou seja, f é bijetora.

($\Leftarrow$) Se f é bijetora, então existe uma função $g : B \to A$ tal que $g \circ f = I_A$ e $f \circ g = I_B$, ou seja,

$$\begin{cases} \textit{Hipótese:} & f \text{ é bijetora,} \\ \textit{Tese:} & \text{Existe } g : B \to A \text{ tal que } g \circ f = I_A \text{ e } f \circ g = I_B. \end{cases}$$

Suponha que f é bijetora. Pelo Teorema 7.4, $f^{-1} : B \to A$ é uma função tal que $f(x) = y$ se, e somente se, $f^{-1}(y) = x$. Consequentemente, dado $x \in A$ qualquer, tome $y = f(x)$. Assim,

$$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}\big(f(x)\big) = f^{-1}(y) = x = I_A(x).$$

De um modo similar, dado $y \in B$, defina $x = f^{-1}(x)$. Nesse caso,

$$f \circ f^{-1}(y) = f\big(f^{-1}(y)\big) = f(x) = y = I_B(y).$$

Portanto, a função $g = f^{-1}$ é tal que $g \circ f = I_A$ e $f \circ g = I_B$.

$\square$

Com base no Teorema 7.5, podemos introduzir a seguinte definição:

Definição 7.2. *Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to A$ duas funções. Dizemos que g é a função inversa de f se, e somente se, $f \circ g = I_B$ e $g \circ f = I_A$. Neste caso, geralmente denotamos g por f^{-1}.*

Observação 7.1. A partir do Teorema 7.5 e da Definição 7.2, temos que uma função $f : A \to B$ possui inversa se, e somente se, f é bijetora.

Observação 7.2. Dada uma função $f : A \to B$, f^{-1} denota, em princípio, a relação inversa da função f. No caso da relação inversa ser uma função, ela é a função inversa de f. Essa observação justifica o fato de usarmos o mesmo símbolo para denotar tanto a relação inversa como a função inversa.

Exemplo 7.5. A função $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{N}$ tal que $f(x) = x + 1$ é invertível. Sua inversa é a função $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}_+$ com $g(x) = x - 1$. Para provar que a função g é a inversa da função f, devemos mostrar que as funções $g \circ f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ e $f \circ g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ são identidades, ou seja, $g \circ f = I_{\mathbb{Z}_+}$ e $f \circ g = I_{\mathbb{N}}$.

De fato, sejam $x \in \mathbb{Z}_+$ e $y \in \mathbb{N}$. Primeiramente, observe que

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = f(x) - 1 = (x + 1) - 1 = x.$$

De um modo análogo, temos que

$$f \circ g(y) = f(g(y)) = g(y) + 1 = (y - 1) + 1 = y.$$

Logo, $g \circ f = I_{\mathbb{Z}_+}$ e $f \circ g = I_{\mathbb{N}}$. Segue da Definição 7.2 que a função g é a inversa da função f. Além disso, pelo Teorema 7.5, concluímos que f é bijetora.

Exemplo 7.6. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax + b$ em que $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$ é bijetora, conforme Exemplo 6.6. Segue do Teorema 7.5 que existe uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g \circ f = I_{\mathbb{R}}$ e $f \circ g = I_{\mathbb{R}}$. Nesse caso, a função g é a inversa de f. Para obter a função inversa g, basta lembrar que a função inversa coincide com a relação inversa de f, ou seja,

$$f(x) = y \Leftrightarrow (x, y) \in f \Leftrightarrow (y, x) \in g \Leftrightarrow g(y) = x.$$

Dessa forma, precisamos apenas isolar x na equação que define $f(x)$ para obter a função g. A saber, isolando x na equação $f(x) = ax + b = y$, obtemos

$$g(y) = \frac{y - b}{a} = x.$$

Para provar que a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{x-b}{a}$, é a inversa de f, devemos demonstrar que $g \circ f = I_{\mathbb{R}}$ e $f \circ g = I_{\mathbb{R}}$. Em outras palavras, basta mostrar que $g \circ f(x) = x$ e $f \circ g(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Com efeito, suponha que $x \in \mathbb{R}$. Sendo $a \neq 0$, valem as equações

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \frac{f(x) - b}{a} = \frac{(ax + b) - b}{a} = x.$$

Similarmente, temos que

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = ag(x) + b = a\left(\frac{x - b}{a}\right) + b = (x - b) + b = x.$$

Logo, $g \circ f = I_{\mathbb{R}}$ e $f \circ g = I_{\mathbb{R}}$. Segue da Definição 7.2 que g é a função inversa de f.

Exemplo 7.7. Considere a função $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tal que $f(x) = x^2$. Vamos mostrar que a função $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $g(x) = \sqrt{x}$, é a sua inversa e que f é bijetora.

De fato, as seguintes equações são válidas para qualquer $x \in \mathbb{R}_+$:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = (\sqrt{x})^2 = x.$$

De um modo similar, para qualquer $x \in \mathbb{R}_+$, temos que

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \sqrt{x^2} = |x| = x.$$

Logo, valem as equações $g \circ f = I_{\mathbb{R}_+}$ e $f \circ g = I_{\mathbb{R}_+}$. Portanto, g é a função inversa de f. Como f é inversível, podemos aplicar o Teorema 7.5, para concluir que f é bijetora.

7.3 Exercícios Propostos

Exercício 7.1. Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ duas funções. Prove que a relação $g \circ f = \{(x, y) \in A \times C : \exists b \in B, (x, b) \in f$ e $(b, y) \in g\}$ é uma função.

Exercício 7.2. Sejam $f : A \to B$ uma função e $g = \{(y, x) \in Im(f) \times A : (x, y) \in f\}$ uma relação. Mostre que, se f é injetora, então g é uma função.

Exercício 7.3. Sejam $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ e as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$ e $g(x) = \dfrac{x - b}{a}$. Mostre que, f é bijetora e que g é a inversa de f.

Exercício 7.4. Sejam $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ e $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ duas funções em que $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sqrt{x}$. Mostre que, f é bijetora e que a função g é a inversa de f.

Exercício 7.5. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções em que $f(x) = x^3$ e $g(x) = \sqrt[3]{x}$. Mostre que, f é bijetora e que a função g é a sua inversa.

Exercício 7.6. Mostre que, se a função $f : A \to B$ possui uma inversa então ela é única.

Exercício 7.7. Mostre que, se a função $f : A \to B$ é invertível, então a função $f^{-1} : B \to A$ também é invertível e vale a iguardade $(f^{-1})^{-1} = f$.

Exercício 7.8. Mostre que, se a função $f : A \to B$ é bijetora, então a função $f^{-1} : B \to A$ também é bijetora.

Exercício 7.9. Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funções bijetoras. Mostre que a função composta $g \circ f : A \to C$ também é bijetora e $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Exercício 7.10. Para cada uma das seguintes funções, faça:

(i) Mostre que f é injetora ou dê um contra-exemplo.

(ii) Mostre que f é sobrejetora ou dê um contra-exemplo.

(iii) Se a função f é bijetora, exiba sua inversa.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x$.

(b) $f : \mathbb{R} \to [-1, \infty), f(x) = x^2 - 1$.

(c) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(x) = 2x$.

(d) $f : (0, 1] \to [1, \infty), f(x) = \dfrac{1}{x}$.

(e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x - |x|$.

(f) $f : \mathbb{R} - 1 \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

(g) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, f(x) = x^2!$.

(h) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{-1}{2 + |x|}$.

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{|x|}$.

(j) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \cos(x) + \mathrm{sen}(x)$.

(k) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, f(x) = (3x - 1)(2 - x)$.

(l) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, f(x) = \begin{cases} (x-1)/2, & \text{se } x \text{ é impar,} \\ -x/2, & \text{se } x \text{ é par.} \end{cases}$

(m) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ -x & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

(n) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x, y) = x + xy + y$.

(o) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}, f(x) = (x, x)$.

(p) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x$.

(q) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x) = x + |y|$.

(r) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = xy$.

(s) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x^2 + y^2, x$.

(t) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = (3x - y, x + y)$.

(u) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x^2 + y, x - y)$.

(v) $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x + y$.

(w) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, f(x) = (x, 0)$.

(x) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (x + y, x + z)$.

(y) $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = fracx1 + x$.

(z) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, f(x) = (1 + x, 1 - x)$.

Exercício 7.11. Seja $f : A \to B$, com $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Dizemos que f é *estritamente crescente* se, e somente se, para todo $x, y \in A$, com $x < y$, tem-se $f(x) < f(y)$.

(a) Dê um exemplo de uma função estritamente crescente.

(b) Dê um exemplo de uma função que não é estritamente crescente.

(c) Mostre que, se $f : A \to B$ é estritamente crescente, então f é injetora.

(d) Mostre que, se $f : A \to B$ e $g : B \to C$, com $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$, são funções estritamente crescente, então $g \circ f : A \to C$ é também estritamente crescente.

(e) Mostre ou de um contra-exemplo para a recíproca do item anterior: "Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$, com $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$. Se a função composta $g \circ f : A \to C$ é estritamente crescente, então ambas f e g são estritamente crescentes".

(f) Apresente a definição de uma função estritamente decrescente e refaça os itens anteriores para essa classe de funções.