LIÇÃO 6

FUNÇÕES

Um dos conceitos mais importantes da matemática é a noção de função. Com efeito, acreditamos que o leitor já teve contato com funções no ensino médio ou em outras disciplinas como cálculo. Em geral, uma função é apresentada como uma regra que associa x com $y = f(x)$. Nesse capítulo apresentaremos uma definição formal de função. Especificamente, veremos que uma função nada mais é que uma tipo particular de relação.

6.1 Conceitos Básicos

Definição 6.1. *Uma relação f de A em B é dita ser uma função de A em B se, e somente se, satisfaz as seguintes condições:*

(a) *Para todo $x \in A$, existe $y \in B$ tal que xfy.*

(b) *Se xfy e xfz, então $y = z$.*

Denotamos por:

1. $f : A \to B$ a função f de A em B; muitas vezes se diz "a função f"em vez de "a função $f : A \to B$", neste caso, ficam subentendidos os conjuntos A e B.

2. $y = f(x)$ indica que y é o único valor de B tal que xfy, que se lê: y é o valor que a função assume em x ou y é a imagem de x sob f.

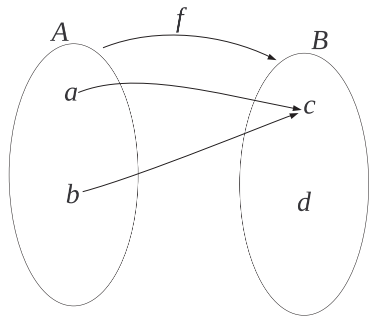

Figura 6.1: Uma função $f : A \to B$ com $f(a) = f(b) = c$.

3. $x \mapsto f(x)$ é utilizado para indicar que f faz corresponder a x o valor $f(x)$.

Simbolicamente:

$$\begin{array}{rcl} f: A & \to & B \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

O conjunto A é denominado *domínio da função* f e será denotado por $Dom(f)$. O conjunto B é denominado *contradomínio* de f e será denotado por $Cdom(f)$.

Observação 6.1. Ressaltamos que:

1. Elementos distintos em A podem ter a mesma imagem.

   Observe na Figura 1 que $f(a) = c$ e $f(b) = c$, ou seja, para cada elemento do domínio $A = \{a, b\}$, existe um único elemento no contradomínio $B = \{c, d\}$, que neste caso, é o elemento c, tal que afc e bfc.

2. Um elemento do domínio A não pode ter duas imagens distintas:

   Segue da Definição 6.1 item (b) que "se xfy e xfz então $y = z$". Essa condicional é falsa no exemplo apresentado na Figura 2, pois afc e afd, porém $c \neq d$. Portanto, a relação $f = \{(a, c), (a, d), (b, d)\}$ não é uma função de A em B.

3. O conjunto imagem da função f de A em B, definido por:

   $$Im(f) = \{y \in B : y = f(x) \text{ com } x \in A\}, \qquad (6.1)$$

   é subconjunto de B. A Figura 3 ilustra essa ideia.

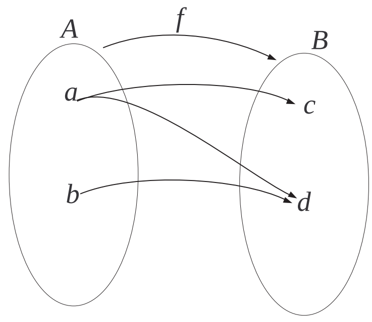

Figura 6.2: f não é uma função de A em B.

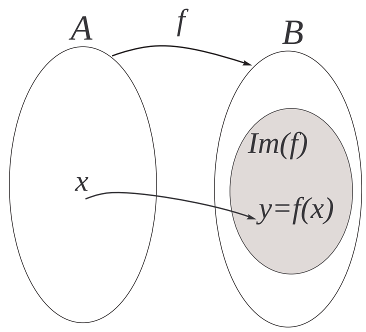

Figura 6.3: O conjunto $Im(f)$ é subconjunto do $Cdom(f)$.

Observe, porém, que nem sempre $Im(f) = B$, ou seja, pode existir um elemento $y \in B$ tal que $y \neq f(x)$ para todo $x \in A$. A Figura 3 ilustra um exemplo no qual $Im(f) \subset B$, mas $Im(f) \neq B$.

4. Para todo $x \in A$ existe um único $y \in B$ tal que $y = f(x)$, ou seja, todo elemento do domínio da função tem uma única imagem no contradomínio B.

   A Figura 4 apresenta uma relação f no qual $c \in A$, mas $f(c) \neq y$ para todo $y \in B$. Neste caso, o item (a) da Definição 6.1 não foi satisfeito. Portanto a relação $f = \{(a,d),(b,e)\}$ não é uma função de $A = \{a,b,c\}$ em $B = \{d,e\}$.

Exemplo 6.1. A relação $f = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = x^2\}$ é uma função. De fato, devemos provar que a relação f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ com $f(x) = x^2$ satisfaz as seguintes condições:

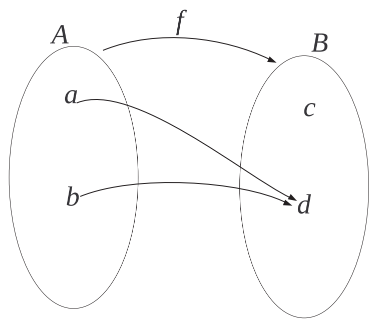

Figura 6.4: f é uma função de A em B com $Im(f) \neq B$.

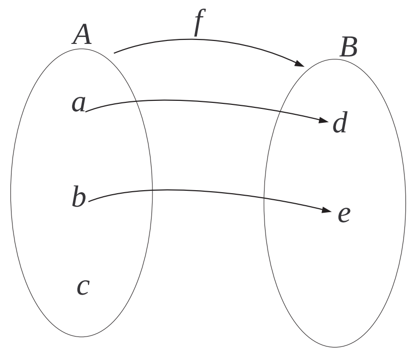

Figura 6.5: f não é uma função de A em B.

(a) Para todo $x \in \mathbb{R}$, existe um $y \in \mathbb{R}$ tal que xfy.

(b) Se xfy e xfz então $y = z$.

Neste caso, podemos escrever:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

Demonstração. Vamos mostrar primeiro o item (a).

$$\begin{cases} \textit{Hipótese:} & x \in \mathbb{R}, \\ \textit{Tese:} & \text{Existe } y \in \mathbb{R} \text{ tal que } (x, y) \in f. \end{cases}$$

Suponha que $x \in \mathbb{R}$. Como $x^2 \in \mathbb{R}$, considere $y = x^2$. Desse modo, tem-se que $(x, y) \in f$.

Vamos agora demonstrar a veracidade do item (b).

$$\begin{cases} \textit{Hipótese:} & xfy \text{ e } xfz, \\ \textit{Tese:} & y = z. \end{cases}$$

Suponha que xfy e xfz. Deste modo, $f(x) = y$ e $f(x) = z$. Como $f(x) = x^2$, segue que, $y = x^2$ e $z = x^2$. Logo $y = z$.

Uma vez que as condições (a) e (b) foram satisfeitas, podemos concluir que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$ é uma função. $\square$

Exemplo 6.2. A relação $f = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x = y^2\}$ não é uma função.

De fato, vamos apresentar um contra-exemplo que viola o item (a) da Definição 6.1. Observe que $-1 \in Dom(f)$ e $-1 \neq y^2$ para todo $y \in Cdom(f)$. Logo $(-1, y) \notin f$. Observe também que $(1,1) \in f$ e $(1,-1) \in f$, porém $-1 \neq 1$. Consequentemente o item (b) da Definição 6.1 também não foi satisfeito.

Exemplo 6.3 (Função Identidade)**.** Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto, a relação identidade I_A é uma função, denominada *função identidade*.

$$\begin{array}{rcl} I_A : A & \to & A \\ x & \mapsto & x \end{array}$$

Demonstração. Vamos mostrar que a relação identidade I_A satisfaz as duas condições que definem uma função. condições:

(a) Para todo $x \in A$, existe um $y \in A$ tal que $(x,y) \in I_A$.

$$\begin{cases} \textit{Hipótese:} & x \in A, \\ \textit{Tese:} & \text{Existe um } y \in A \text{ tal que } (x,y) \in I_A. \end{cases}$$

Suponha que $x \in A$ e considere $y = x$. Deste modo, $(x,y) \in I_A$.

(b) Se $(x,y) \in I_A$ e $(x,z) \in I_A$ então $y = z$.

$$\begin{cases} \textit{Hipótese:} & (x,y) \in I_A \text{ e } (x,z) \in I_A, \\ \textit{Tese:} & y = z. \end{cases}$$

Suponha que $(x,y) \in I_A$ e $(x,z) \in I_A$. Segue da definição da relação identidade que $x = y$ e $x = z$. Logo $y = z$.

Por (a) e (b), segue que, $I_A : A \to A$ tal que $I_A(x) = x$ é uma função. $\square$

Exemplo 6.4 (Função Constante)**.** Sejam A e B dois conjunto e c um elemento do contradomínio B. A relação $f = \{(x, y) \in A \times B : y = c\}$ é uma função denominada *função constante*.

$$\begin{array}{rccc} f: & A & \to & B \\ & x & \mapsto & c \end{array}$$

Demonstração. Vamos mostrar que a relação identidade f satisfaz as duas condições que definem uma função.

(a) Para todo $x \in A$, existe um $y \in A$ tal que $(x, y) \in f$.

$$\begin{cases} \textit{Hipótese:} & x \in A, \\ \textit{Tese:} & \text{Existe um } y \in A \text{ tal que } (x, y) \in f. \end{cases}$$

Para qualquer $x \in A$, basta considerar $y = c$. Deste modo, o par $(x, y) \in f$.

(b) Se $(x, y) \in f$ e $(x, z) \in f$ então $y = z$.

$$\begin{cases} \textit{Hipótese:} & (x, y) \in f \text{ e } (x, z) \in f, \\ \textit{Tese:} & y = z. \end{cases}$$

Se xfy e xfz então $y = c$ e $z = c$. Logo $y = z$.

Como ambos os itens (a) e (b) são verdadeiros, $f : A \to B$ tal que $f(x) = c$ é uma função. $\square$

Exemplo 6.5. A relação $f = \{(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1] : x^2 + y^2 = 1\}$ não é uma função, pois $(0, 1) \in f$ e $(0, -1) \in f$, porém $-1 \neq 1$.

6.2 Função Bijetora

Definição 6.2. *Uma função f de A em B é denominada:*

(a) *Injetora se, e só se, para todos $x_1, x_2 \in A$, se $x_1 \neq x_2$ então $f(x_1) \neq f(x_2)$, ou equivalentemente, se $f(x_1) = f(x_2)$ então $x_1 = x_2$.*

(b) *Sobrejetora se, e só se, para todo $y \in B$ existe $x_0 \in A$ tal que $y = f(x_0)$.*

(c) *Bijetora se, e somente se, f é injetora e sobrejetora.*

Exemplo 6.6. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax + b$ em que $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$ é bijetora.

Demonstração. (a) Vamos mostrar que f é injetora.

$$\begin{cases} \textit{Hipótese:} & x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ tais que } f(x_1) = f(x_2), \\ \textit{Tese:} & x_1 = x_2. \end{cases}$$

Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ e suponhamos que $f(x_1) = f(x_2)$, ou seja:

$$\begin{aligned} ax_1 + b = ax_2 + b \Leftrightarrow ax_1 &= ax_2 \qquad (a \neq 0) \\ \Leftrightarrow x_1 &= x_2. \end{aligned}$$

Logo, a função f é injetora.

(b) Vamos mostrar agora que f é sobrejetora.

$$\begin{cases} \textit{Hipótese:} & y \in \mathbb{R}, \\ \textit{Tese:} & \text{Existe } x_0 \in \mathbb{R} \text{ tal que } f(x_0) = y. \end{cases}$$

Dado $y \in \mathbb{R}$, tome $x_0 = (\frac{y-b}{a}) \in \mathbb{R}$. Nesse caso, temos que

$$\begin{aligned} f(x_0) &= ax_0 + b \\ &= a\left(\frac{y-b}{a}\right) + b \qquad (a \neq 0) \\ &= (y - b) + b \\ &= y. \end{aligned}$$

Logo a função f é sobrejetora.

Uma vez que a função f é injetora e sobrejetora, concluímos que f é bijetora. $\square$

Exemplo 6.7. A função $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ com $f(x) = x^2$ é bijetora. Lembre-se que $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.

Demonstração. (a) Vamos mostrar que f é injetora.

$$\begin{cases} \textit{Hipótese:} & x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+ \text{ tais que } f(x_1) = f(x_2), \\ \textit{Tese:} & x_1 = x_2. \end{cases}$$

Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$ e suponha que $f(x_1) = f(x_2)$, ou seja, $(x_1)^2 = (x_2)^2$. Deste modo, $\sqrt{(x_1)^2} = \sqrt{(x_2)^2} \Leftrightarrow |x_1| = |x_2| \Leftrightarrow x_1 = x_2$, pois $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$. Logo a função f é injetora.

(b) Vamos mostrar agora que f é sobrejetora.

$$\begin{cases} \textit{Hipótese:} & y \in \mathbb{R}_+, \\ \textit{Tese:} & \text{Existe } x_0 \in \mathbb{R}_+ \text{ tal que } f(x_0) = y. \end{cases}$$

Seja $y \in \mathbb{R}_+$, devemos encontrar $x_0 \in Dom(f)$ tal que $f(x_0) = y$, ou seja, $(x_0)^2 = y$. Vejamos, considere $x_0 = \sqrt{y}$. Sendo assim, temos

$$f(x_0) = (x_0)^2 = (\sqrt{y})^2 = y.$$

Logo, a função f é sobrejetora.

Como f é injetora e sobrejetora, concluímos que a função é bijetora. □

Exemplo 6.8. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $f(x) = x^2$, não é injetora e nem sobrejetora.

Demonstração. (a) Vamos verificar primeiro que f não é injetora.

De fato, considere $-1, 1 \in \mathbb{R}$. Observe que $-1 \neq 1$, porém $f(-1) = f(1) = 1$. Logo f não é injetora.

(b) Vamos agora mostrar que f não é sobrejetora.

Com efeito, temos que $-1 \in Cdom(f)$ mas, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos que $x^2 \neq -1$, ou seja, $f(x) \neq -1$. Logo a função f não é sobrejetora. □

Exemplo 6.9. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, em que $f(x) = x^3$, é bijetora.

Demonstração. (a) Vamos mostrar que f é injetora.

$$\begin{cases} \textit{Hipótese:} & x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ tais que } f(x_1) = f(x_2), \\ \textit{Tese:} & x_1 = x_2. \end{cases}$$

Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ e suponha que $f(x_1) = f(x_2)$. Pela definição de f, temos que $(x_1)^3 = (x_2)^3$. Deste modo, $\sqrt[3]{(x_1)^3} = \sqrt[3]{(x_2)^3} \Leftrightarrow x_1 = x_2$. Logo f é injetora.

(b) Vamos mostrar agora que f é sobrejetora.

$$\begin{cases} \textit{Hipótese:} & y \in \mathbb{R}, \\ \textit{Tese:} & \text{Existe } x_0 \in \mathbb{R} \text{ tal que } f(x_0) = y. \end{cases}$$

Considere $y \in \mathbb{R}$, devemos encontrar $x_0 \in Dom(f)$ tal que $f(x_0) = y$, ou seja, $(x_0)^3 = y$. Para tanto, basta considerar $x_0 = \sqrt[3]{y}$. Com efeito,

$$f(x_0) = (x_0)^3 = (\sqrt[3]{y})^3 = y.$$

Logo a função f é sobrejetora.

Sendo a função injetora e sobrejetora, concluímos que f é bijetora. □

Exemplo 6.10. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ tal que $f(x) = |x-1|$ não é injetora, mas é sobrejetora.

Demonstração. (a) Vamos verificar que f não é injetora.

Note que $0, 2 \in \mathbb{R}$, $0 \neq 2$, mas $f(0) = f(2) = 1$. Logo a função f não é injetora.

(b) Vamos mostrar que f é sobrejetora.

$$\begin{cases} \textit{Hipótese:} & y \in \mathbb{R}_+, \\ \textit{Tese:} & \text{Existe } x_0 \in \mathbb{R} \text{ tal que } f(x_0) = y. \end{cases}$$

Seja $y \in \mathbb{R}_+$, devemos encontrar $x_0 \in Dom(f)$ tal que $f(x_0) = y$, isto é, $|x_0 - 1| = y$. Com efeito, se $x_0 = y + 1$, então

$$f(x_0) = |x_0 - 1| = |(y+1) - 1| = |y| \quad (y \geq 0) = y.$$

Portanto, a função f é sobrejetora.

□

Vamos concluir o capítulo com um teorema simples que relaciona o conceito de função sobrejetora com o conjunto imagem da função.

Teorema 6.1. *Uma função $f : A \to B$ é sobrejetora se, e só se, $Im(f) = B$.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$

$$\begin{cases} \textit{Hipótese:} & f : A \to B \text{ é sobrejetora}, \\ \textit{Tese:} & Im(f) = B, \text{ ou seja, } Im(f) \subseteq B \text{ e } B \subseteq Im(f). \end{cases}$$

Por definição, $Im(f) = \{y \in B : y = f(x) \text{ com } x \in A\}$. Logo, $Im(f) \subset B$.

($\Leftarrow$)

$$\begin{cases} \textit{Hipótese:} & Im(f) = B, \\ \textit{Tese:} & f : A \to B \text{ é sobrejetora.} \end{cases}$$

Seja $y \in B$. Como $Im(f) = B$, podemos afirmar que $y \in Im(f)$. Deste modo, existe $x \in A$ tal que $y = f(x)$ e, portanto, $f : A \to B$ é sobrejetora.

□

6.3 Exercícios Propostos

Exercício 6.1. Prove que a relação $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = x\}$ é uma função.

Exercício 6.2. Mostre que a relação $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, com $(x, y) \in f \Leftrightarrow y = x^2$, é uma função.

Exercício 6.3. Considere a relação $f = \{(x, y) \in A \times B : y^2 = x\}$. Prove que:

(a) Se $A = \mathbb{R}_+$ e $B = \mathbb{R}_+$, então f é uma função.

(b) Se $A = \mathbb{R}$ e $B = \mathbb{R}_+$, então f não é uma função.

(c) Se $A = \mathbb{R}+$ e $B = \mathbb{R}$, então f não é uma função.

(d) Faça a representação gráfica dos itens (a), (b) e (c).

Exercício 6.4. Considere a relação $f \subseteq A \times B$ dada por $(x, y) \in f \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$. Demonstre que:

(a) Se $A = [-1, 1]$ e $B = [0, 1]$ então f é uma função.

(b) Se $A = [0, 1]$ e $B = [-1, 1]$ então f não é uma função.

(c) Faça a representação gráfica dos itens (a) e (b).

Exercício 6.5. Prove que a relação $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dada por $xfy \Leftrightarrow y = |x - 1|$ é uma função e apresente sua representação gráfica.

Exercício 6.6. Considere a relação $f = \{(x, y) \in A \times B : x = |y|\}$. Prove que:

(a) Se $A = \mathbb{R}_+$ e $B = \mathbb{R}_+$ então f é uma função.

(b) Se $A = \mathbb{R}$ e $B = \mathbb{R}_+$ então f não é uma função.

(c) Se $A = \mathbb{R}_+$ e $B = \mathbb{R}$ então f não é uma função.

(d) Faça a representação gráfica dos itens (a), (b) e (c).

Exercício 6.7. Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $f : A \to A$ a função dada por

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{se } x \neq 6, \\ 1, & \text{se } x = 6. \end{cases}$$

Mostre que f é bijetora.

Exercício 6.8. Mostre que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - 1$ não é injetora nem sobrejetora.

Exercício 6.9. Sejam $f : A \to B$ e $g : A \to B$ duas funções. Lembre-se que f e g são relações em $A \times B$. Logo, podemos definir a união

$$f \cup g = \{(x, y) \in A \times B : (x, y) \in f \text{ ou } (x, y) \in g\}$$

e a intersecção

$$f \cap g = \{(x, y) \in A \times B : (x, y) \in f \text{ e } (x, y) \in g\}.$$

Para cada afirmação abaixo, mostre ou dê um contra-exemplo.

(a) A relação $f \cup g$ é uma função de A em B.

(b) A relação $f \cap g$ é uma função de A em B.

(c) Se $f \cup g : A \to B$, então $f = g$.

(d) Se $f \cap g : A \to B$, então $f = g$.

Exercício 6.10. Sejam $f : A \to B$ e $g : C \to D$, com $A, C \subseteq X$ e $B, D \subseteq Y$. Mostre que, se $A \cap C = \emptyset$, então $f \cup g : A \cup C \to B \cup D$.

Exercício 6.11. Seja $f : A \to B$, com $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Dizemos que f é *estritamente crescente* se, e somente se, para todo $x, y \in A$, com $x < y$, tem-se $f(x) < f(y)$.

(a) Dê um exemplo de uma função estritamente crescente.

(b) Dê um exemplo de uma função que não é estritamente crescente.

(c) Mostre que, se $f : A \to B$ é estritamente crescente, então f é injetora.

(d) Apresente a definição de uma função estritamente decrescente e refaça os itens anteriores para essa classe de funções.