LIÇÃO 3

IMPLICAÇÃO E EQUIVALÊNCIA LÓGICA. TAUTOLOGIA, CONTRADIÇÃO E CONTINGÊNCIA

Podemos ter proposições compostas $P(p, q, \ldots, r)$ que assumem somente o valor lógico verdadeiro ou somente o valor lógico falso para quaisquer que sejam os valores lógicos das proposições $p, q, \ldots, r$. Proposições que satisfazem uma dessas propriedades possuem um papel importante na lógica e, por isso, são denominadas conforme a definição:

Definição 3.1 (Tautologia, Contradição e Contingência)**.** *Seja $P(p, q, \ldots, r)$ uma proposição. Diremos que:*

(a) P é uma tautologia se P assume o valor lógico verdadeiro para quaisquer que sejam os valores lógicos das proposições $p, q, \ldots, r$.

(b) P é uma contradição se P assume o valor lógico falso independentemente dos valores lógicos das proposições $p, q, \ldots, r$.

Se P não é uma tautologia e nem uma contradição, diremos que P é uma contingência.

Exemplo 3.1. A proposição composta $(p \wedge \neg p)$ sempre é falsa enquanto que $(p \vee \neg p)$ sempre é verdadeira, conforme Tabela 3.1. Portanto, $(p \wedge \neg p)$ é uma contradição enquanto que $(p \vee \neg p)$ é uma tautologia.

Exemplo 3.2. Mostre que a proposição $P(p, q) : (p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$ é uma tautologia.

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$	$p \vee \neg p$
V	F	F	V
F	V	F	V

Tabela 3.1: Tabelas-verdade de $(p \wedge \neg p)$ e $(p \vee \neg p)$.

p	q	$\neg p$	$p \to q$	$\neg p \vee q$	$(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$
V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

Tabela 3.2: Tabela-verdade da proposição $(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$.

Demonstração. Devemos mostrar que a proposição P sempre assume o valor lógico verdadeiro. Para tanto, considere a Tabela 3.2, em que é apresentada a tabela-verdade dessa proposição. Uma vez que $(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$ sempre assume o valor lógico verdadeiro, podemos concluir que P é uma tautologia. □

Exemplo 3.3. Demonstre que a proposição $P(p,q) : (p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$ é uma contradição.

Demonstração. Pela Tabela 3.3, concluímos que a proposição $P : (p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$ sempre assume o valor lógico falso. Portanto, P é uma contradição. □

Exemplo 3.4. Prove que a proposição $P(p,q) : \neg(p \wedge \neg q)$ é uma contingência.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
V	V	F	F	F	V	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	F	F

Tabela 3.3: Valores lógicos da proposição $(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$.

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge \neg q)$
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

Tabela 3.4: Valores lógicos da proposição $\neg(p \wedge \neg q)$.

Demonstração. A proposição $\neg(p \wedge \neg q)$ será uma contingência, se P assume os valores lógicos verdadeiro e falso. De fato, pela Tabela 3.4, a proposição $\neg(p \wedge \neg q)$ não é uma tautologia e nem uma contradição. Logo, ela é uma contingência. □

Observe que a negação de uma tautologia é uma contradição, e vice-versa. Porém, a negação de uma contingência é também uma contingência.

3.1 Implicação Lógica

O conceito de tautologia é usado para formarmos um raciocínio correto ou verdadeiro. Com efeito, apresentamos abaixo uma definição, amplamente utilizada na matemática, que está baseada no conceito de tautologia:

Definição 3.2 (Implicação Lógica)**.** *Sejam p e q duas proposições (simples ou compostas). Se $p \rightarrow q$ é uma tautologia, então escreveremos $p \Rightarrow q$ e diremos que p implica q é uma* implicação lógica*. Escrevemos $p \not\Rightarrow q$ se $p \rightarrow q$ não for uma tautologia.*

É importante observar que a condicional $p \rightarrow q$ pode ser tanto uma proposição falsa como uma proposição verdadeira. Porém, $p \Rightarrow q$ pode ser interpretado como a afirmação: "$p \rightarrow q$ é uma proposição verdadeira". Consequentemente, a proposição q será verdadeira sempre que a proposição p for verdadeira. Por outro lado, se a proposição p for falsa, então q pode ser tanto verdadeira como falsa.

Em português, ambas $p \Rightarrow q$ e $p \rightarrow q$ são escritas da mesma forma. Contudo, quando enunciamos um teorema, sempre consideramos uma implicação lógica. Em outras palavras, uma vez que as hipóteses de um teorema foram satisfeitas (p é verdadeira), necessariamente temos a veracidade do consequente (q também é verdadeira). Por outro lado, uma

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$(p \to q) \wedge (q \to r)$	$p \to r$	P
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Tabela 3.5: Tabela-verdade da condicional $P : [(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$.

conjectura poderia ser escrita na forma $p \to q$. Lembre-se que uma conjectura é uma afirmação que acreditamos ser verdadeira mas ainda não foi demonstrada. Logo, ela pode ser tanto verdadeira como falsa.

Exemplo 3.5. Considere o teorema de Pitágoras: "*Se um triângulo é retângulo, então a medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos*". Esse teorema pode ser escrito como $p \Rightarrow q$, em que p é a proposição "*o triangulo é retângulo*" e q é a proposição "*a medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos*". Desse modo, numa aplicação desse teorema teorema, verificamos se p é verdadeira e, posteriormente, utilizamos o fato de q ser verdadeira.

Exemplo 3.6 (Silogismo ou Lei da Transitividade)**.** Provaremos nesse exemplo o princípio fundamental do raciocínio lógico dedutivo, a "Lei do Silogismo Hipotético", também chamada "Lei Transitiva", que estabelece:

$$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \Rightarrow (p \to r). \tag{3.1}$$

Demonstração. Para demostrar esta implicação lógica, devemos verificar que a proposição $P : [(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$ é uma tautologia. Para tanto, construímos as tabelas-verdade das proposições $[(p \to q) \wedge (q \to r)]$, $(p \to r)$ e P, apresentadas na Tabela 3.5. Analisando esta tabela, podemos afirmar que P será sempre verdadeira e, portanto, conforme Definição 3.2, temos uma implicação lógica em (3.1). □

Exemplo 3.7. Considere verdadeiras as seguintes condicionais:

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \rightarrow (p \vee q)$	$p \rightarrow (p \wedge q)$
V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	F
F	V	V	F	V	V
F	F	F	F	V	V

Tabela 3.6: Tabelas-verdade das proposições $p \rightarrow (p \vee q)$ e $p \rightarrow (p \wedge q)$.

(a) Se a então b.

(b) Se b então c.

A Lei do Silogismo garante a veracidade da condicional:

(c) Se a então c.

Exemplo 3.8. Sejam p e q duas proposições, mostre que:

(a) $p \Rightarrow p \vee q$.

(b) $p \not\Rightarrow p \wedge q$.

Demonstração. No item (a), devemos mostrar que $p \rightarrow (p \vee q)$ é uma tautologia. De um modo similar, no item (b), devemos verificar que $p \rightarrow (p \wedge q)$ não é uma tautologia. Para tanto, construímos as tabelas-verdade das proposições $p \rightarrow (p \vee q)$ e $p \rightarrow (p \wedge q)$ conforme mostra a Tabela 3.6. Observe que $p \rightarrow (p \vee q)$ é sempre verdadeira. Portanto, é correto escrever $p \Rightarrow p \vee q$. Todavia, $p \not\Rightarrow p \wedge q$ pois a condicional $p \rightarrow (p \wedge q)$ é falsa quando p é verdadeira e q é falsa. $\square$

Exemplo 3.9. Sejam p e q duas proposições quaisquer. Mostre que que $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$.

Demonstração. Devemos mostrar que a condicional $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ é uma tautologia. Com efeito, observamos na Tabela 3.7 que a condicional $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ é sempre verdadeira. $\square$

Exemplo 3.10. Sejam p e q proposições quaisquer. Mostre que $(p \rightarrow q) \not\Rightarrow (\neg p \leftrightarrow \neg q)$.

Demonstração. Devemos mostrar que a condicional $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \leftrightarrow \neg q)$ não é uma tautologia. Com efeito, a Tabela 3.8 mostra que $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \leftrightarrow \neg q)$ é falsa quando p é falsa e q é verdadeira pois, nesse caso, temos $p \rightarrow q$ verdadeira mas $\neg p \leftrightarrow \neg q$ falsa. Logo, concluímos que $p \rightarrow q$ não implica $\neg p \leftrightarrow \neg q$ e escrevemos $(p \rightarrow q) \not\Rightarrow (\neg p \leftrightarrow \neg q)$. $\square$

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	F	V

Tabela 3.7: Tabelas-verdade da condicional $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \rightarrow q$	$\neg p \leftrightarrow \neg q$	$(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \leftrightarrow \neg q)$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V	V

Tabela 3.8: Tabelas-verdade das proposições $(p \rightarrow q)$ e $(\neg p \leftrightarrow \neg q)$.

3.2 Equivalência Lógica

De um modo análogo à definição de implicação lógica, utilizamos o conceito de tautologia para formular a seguinte definição:

Definição 3.3 (Equivalência Lógica)**.** *Sejam p e q duas proposições (simples ou compostas). Se $p \leftrightarrow q$ é uma tautologia, então escreveremos $p \Leftrightarrow q$ e dizemos que as proposições p e q são* equivalentes no sentido da lógica. *Escrevemos $p \not\Leftrightarrow q$ se $p \leftrightarrow q$ não for uma tautologia.*

Exemplo 3.11. Sejam p e q proposições quaisquer. Mostre que $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \leftrightarrow \neg q)$.

Demonstração. A Tabela 3.9 revela que a proposição $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \leftrightarrow \neg q)$ é uma tautologia. Portanto, $(p \leftrightarrow q)$ e $(\neg p \leftrightarrow \neg q)$ são equivalentes do ponto de vista da lógica e podemos escrever $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \leftrightarrow \neg q)$. □

Observe que na equivalência lógica $p \Leftrightarrow q$, as proposições p e q possuem sempre o mesmo valor lógico, ou seja, sempre que uma delas é verdadeira a outra também será verdadeira e, sempre que uma delas é falsa, a outra também será falsa. Consequentemente, as tabelas-verdade destas duas proposições são idênticas.

Teorema 3.1. *Sejam p, q, e r proposições. Então são válidas as propriedades:*

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \leftrightarrow q$	$(\neg p \leftrightarrow \neg q)$	$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \leftrightarrow \neg q\,)$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V

Tabela 3.9: Tabela-verdade da proposição $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (\neg p \Leftrightarrow \neg q)$.

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$	$(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	F	V
F	F	F	F	V

Tabela 3.10: Tabela-verdade da bicondicional $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$.

Comutativa: $(a)\ p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p.$
$(b)\ p \vee q \Leftrightarrow q \vee p.$

Associativa: $(c)\ p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
$(d)\ p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r.$

Distributiva: $(e)\ p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r).$
$(f)\ p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r).$

Demonstração. Primeiramente, vamos verificar que $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$ é uma tautologia. Para tanto, apresentamos na Tabela 3.10 todas as possibilidades dessa bicondicional. Observe que ela é sempre verdadeira. Portanto, é uma tautologia.

Para mostrar que $[p \wedge (q \wedge q)] \leftrightarrow [(p \wedge q) \wedge r]$ e $[p \vee (q \wedge r)] \leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \wedge r)]$ são também tautologias, vamos verificar que "$p \wedge (q \wedge r)$ e $(p \wedge q) \wedge r$", bem como "$p \vee (q \wedge r)$ e $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$", possuem os mesmos valores lógicos. Com efeito, as Tabelas 3.11 e 3.12 apresentam respectivamente as tabelas-verdade dessas proposições são apresentadas. Observe que as duas últimas colunas dessas duas tabelas são iguais.

As demonstrações das demais equivalências serão deixadas a cargo do leitor. □

Exemplo 3.12. Demonstre as seguintes equivalências lógicas:

(a) $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$.

p	q	r	$p \wedge q$	$q \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$	$(p \wedge q) \wedge r$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F
V	F	V	F	F	F	F
V	F	F	F	F	F	F
F	V	V	F	V	F	F
F	V	F	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F

Tabela 3.11: Tabelas-verdade das proposições: $p \wedge (q \wedge r)$ e $(p \wedge q) \wedge r$.

p	q	r	$p \vee q$	$p \vee r$	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	F	V	V
V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	V	F	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	F	V	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Tabela 3.12: Tabelas-verdade das proposições: $p \vee (q \wedge r)$ e $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$

(b) $(p \to q) \Leftrightarrow (\neg p) \vee q$.

(c) $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to p)$.

Demonstração. Inicialmente construímos as tabelas-verdades apresentadas nas Tabelas 3.13, 3.14 e 3.15. A partir dessas tabelas concluímos que são tautologias as bi-condicionais $\neg(\neg p) \leftrightarrow p$, $(p \to q) \leftrightarrow (\neg p) \vee q$ e $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to p)$. □

Exemplo 3.13. Seja p e q duas proposições. Mostre que $(p \to q) \not\Leftrightarrow (\neg p \to \neg q)$.

Demonstração. A Tabela 3.16 apresenta todos os valores lógicos da bicondicional $(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \to \neg q)$. Observe que ela não é uma tautologia. Portanto, podemos escrever $(p \to q) \not\Leftrightarrow (\neg p \to \neg q)$. □

p	$\neg p$	$\neg(\neg p)$	$\neg(\neg p) \leftrightarrow p$
V	F	V	V
F	V	F	V

Tabela 3.13: Tabela-verdade da proposição $\neg(\neg p) \leftrightarrow p$.

p	q	$\neg p$	$p \to q$	$\neg p \vee q$	$(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$
V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

Tabela 3.14: Tabela-verdade da bicondicional $(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$.

Teorema 3.2 (Leis de De Morgan). *Sejam p e q duas proposições quaisquer. Então valem as equivalências lógicas:*

(a) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$.

(b) $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$.

Demonstração. Analisando a Tabela 3.17, podemos concluir que $\neg(p \wedge q)$ e $(\neg p \vee \neg q)$ possuem os mesmos valores lógicos e, portanto, são equivalentes do ponto de vista da lógica. Similarmente, a Tabela 3.18 mostra que a bicondicional $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ é uma tautologia. Portanto, podemos escrever $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$. □

A equivalência lógica $p \wedge q \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ na Lei de De Morgan estabelece que, para negar a proposição composta "$p \wedge q$", basta negar apenas uma das proposições. Similarmente, a equivalência lógica $p \vee q \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ afirma que a negação proposição composta "$p \vee q$" corresponde à negação as duas proposições.

Exemplo 3.14. Apresentaremos a seguir somente proposições falsas seguidas de suas negações, que são proposições verdadeiras.

(a) 2 não é par **ou** 2 não é primo.

Negação: 2 é par **e** 2 é primo.

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \land (q \to p)$	$p \leftrightarrow q$	$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \to q) \land (q \to p)]$
V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V

Tabela 3.15: Tabela-verdade da bicondicional $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \to q) \land (q \to p)]$.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to q$	$\neg p \to \neg q$	$(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \to \neg q)$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V	V

Tabela 3.16: Tabela-verdade da proposição $(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \to \neg q)$.

(b) 2 não é par **e** 2 não é primo.

Negação: 2 é par **ou** 2 é primo.

(c) 3 não é ímpar **ou** 3 não é primo.

Negação: 3 é ímpar **e** 3 é primo.

(d) 5 divide[1] 6 **ou** 6 divide 5.

Negação: 5 não divide 6 **e** 6 não divide 5.

Vamos concluir essa lição com um teorema que apresenta diferentes formas de expressar a condicional $p \to q$.

Teorema 3.3 (Contrapositiva e Redução ao Absurdo)**.** *Sejam p e q duas proposições quaisquer e C uma contradição. Então, a condicional $p \to q$ é equivalente as condicionais:*

(a) **Contrapositiva:** $\neg q \to \neg p$.

(b) **Redução ao Absurdo:** $(p \land \neg q) \to C$.

[1]Sejam a e b números inteiros com $a \neq 0$. Dizemos que a divide b se existe um inteiro k tal que $b = ak$.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V

Tabela 3.17: Tabelas-verdade das proposições: $\neg(p \wedge q)$ e $(\neg p \vee \neg q)$.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
V	V	F	F	V	F	F	V
V	F	F	V	V	F	F	V
F	V	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	F	V	V	V

Tabela 3.18: Tabela-verdade da proposição $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$.

Demonstração. A Tabela 3.19 contém todos os valores lógicos das condicionais $p \rightarrow q$, $\neg q \rightarrow \neg p$ e $(p \wedge \neg q) \rightarrow C$: Observe que as três condicionais possuem os mesmos valores lógicos. Portanto, concluímos as equivalências lógicas: $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$ e $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \rightarrow C$. □

Exemplo 3.15. A afirmação

> *"Se um triângulo é retângulo, então a medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos"*

pode ser expressa em termos da condicional "$p \rightarrow q$", em que p é a proposição "*o triangulo é retângulo*" e q é a proposição "*a medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos*". A contrapositiva desse dessa condicional é "$\neg q \rightarrow \neg p$" que corresponde à afirmação:

> *"Se a medida da hipotenusa* **não** *é igual à soma dos quadrados dos catetos, então o triângulo* **não** *é retângulo"*.

Finalmente, a redução ao absurdo $(p \wedge \neg q) \rightarrow C$ pode ser interpretada como

> "Se um triângulo é retângulo **e** a medida da hipotenusa **não** é igual à soma dos quadrados dos catetos, então temos uma contradição".

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	C	$(p \wedge \neg q) \rightarrow C$	$\neg q \rightarrow \neg p$	$p \rightarrow q$
V	V	F	F	F	F	V	V	V
V	F	F	V	V	F	F	F	F
F	V	V	F	F	F	V	V	V
F	F	V	V	F	F	V	V	V

Tabela 3.19: Tabelas-verdade das condicionais $p \rightarrow q$, $\neg q \rightarrow \neg p$ e $(p \wedge \neg q) \rightarrow C$

3.3 Exercícios Propostos

Exercício 3.1. Nos itens abaixo, determine quais proposições são contingência, contradição ou tautologia.

(a) $p \wedge (\neg q)$.

(b) $q \vee (\neg p)$.

(c) $(p \wedge q) \vee [(\neg p) \vee (\neg q)]$.

(d) $p \leftrightarrow (\neg q)$.

(e) $p \rightarrow (\neg q)$.

(f) $p \wedge (q \vee r)$.

(g) $(p \wedge q) \rightarrow q$.

(h) $(p \rightarrow \neg p) \leftrightarrow p$.

(i) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow [(p \wedge q) \rightarrow (q \wedge r)]$.

(j) $(p \wedge q) \wedge [(\neg p) \vee (\neg q)]$.

(k) $(\neg p \rightarrow p) \leftrightarrow p$.

(l) $(\neg p) \leftrightarrow [p \vee (\neg q)]$.

(m) $[(p \wedge q)] \wedge [\neg(q \leftrightarrow p)]$.

(n) $[p \vee (q \rightarrow r)] \rightarrow p$.

Exercício 3.2. Mostre que as seguintes proposições compostas são tautologias:

(a) Modus Ponens: $[p \wedge (p \to q)] \to q$.

(b) Modus Tollens: $[(p \to q) \wedge \neg q] \to \neg p$.

Exercício 3.3. Sejam p, q e r proposições quaisquer. Demonstre as seguintes implicações lógicas:

(a) $p \Rightarrow (p \vee q)$.

(b) $(p \wedge q) \Rightarrow p$.

(c) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$.

(d) $(p \to q) \wedge p \Rightarrow q$.

(e) $[(p \to q) \wedge (\neg q)] \Rightarrow (\neg p)$.

(f) $[p \to (q \vee r)] \wedge (\neg r) \Rightarrow (p \to q)$.

(g) $(q \to p) \wedge (r \to p) \Rightarrow (q \wedge r \to p)$.

(h) $(p \to q) \Rightarrow [(p \wedge r) \to (q \wedge r)]$.

Exercício 3.4. Verifique as seguintes não implicações para proposições p, q e r quaisquer.

(a) $(p \vee q) \not\Rightarrow p$.

(b) $p \not\Rightarrow (p \wedge q)$.

(c) $(p \vee q) \not\Rightarrow (p \wedge q)$.

(d) $q \not\Rightarrow (p \to q) \wedge p$.

(e) $(\neg p) \not\Rightarrow [(p \to q) \wedge (\neg q)]$.

(f) $(p \to q) \not\Rightarrow [p \to (q \vee r)] \wedge (\neg r)$.

(g) $(q \wedge r \to p) \not\Rightarrow (q \to p) \wedge (r \to p)$.

(h) $[(p \wedge r) \to (q \wedge r)] \not\Rightarrow (p \to q)$.

Exercício 3.5. Dê exemplos ou esclareça por que o exemplo solicitado não existe.

1. Uma implicação lógica com uma conclusão falsa.

2. Uma implicação lógica com uma conclusão verdadeira.

3. Uma implicação lógica com uma hipótese verdadeira e uma conclusão falsa.

Exercício 3.6. Sejam p, q e r proposições quaisquer. Demonstre as seguintes equivalências lógicas:

(a) $p \wedge p \Leftrightarrow p$

(b) $(p \to q) \Leftrightarrow (p \vee q \to q)$.

(c) $(p \to q) \Leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$.

(d) $(p \to q) \Leftrightarrow [p \wedge (\neg q) \to C]$.

(e) $(p \to q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$.

(f) $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to p)$.

(g) $(q \vee r \to p) \Leftrightarrow (q \to p) \wedge (r \to p)$.

(h) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

Exercício 3.7. Verifique as seguintes não equivalências para proposições p, q e r quaisquer.

(a) $(p \wedge q) \not\Leftrightarrow (p \vee q)$.

(b) $(p \to q) \not\Leftrightarrow (q \to p)$.

(c) $(p \to q) \not\Leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$.

(d) $[(p \to q) \wedge p] \not\Leftrightarrow q$.

(e) $[(p \to q) \wedge \neg q] \not\Leftrightarrow (\neg p)$.

(f) $(p \to q) \not\Leftrightarrow (p \wedge q \to C)$.

(g) $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \not\Leftrightarrow (p \to r)$.

(h) $(q \wedge r \to p) \not\Leftrightarrow (q \to p) \wedge (r \to p)$.

Exercício 3.8. Sejam p, q, r e s proposições quaisquer. Demonstre as seguintes implicações lógicas:

(a) $[(p \to q) \wedge (r \to s)] \Rightarrow [(p \vee r) \to (q \vee s)]$;

(b) $(p \to q) \Rightarrow [(p \vee r) \to (q \vee r)]$;

(c) $[(p \vee q) \wedge \neg q] \Rightarrow q$.

Exercício 3.9. A condicional $\to$ é associativa, ou seja, vale a equivalência lógica $[(p \to q) \to r] \Leftrightarrow [p \to (q \to r)]$?

Exercício 3.10. A bicondicional $\leftrightarrow$ é associativa, ou seja, vale a equivalência lógica $[(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r] \Leftrightarrow [p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)]$?

Exercício 3.11. Determine quais das seguintes proposições verdadeiras são tautologias. Em outras palavras, nos itens abaixo são fixadas as proposições $p, q, \ldots, r$ de modo que a proposição composta $P(p, q, \ldots, r)$ é verdadeira. Determine se $P(p, q, \ldots, r)$ continua sendo verdadeira no caso em que $p, q, \ldots, r$ são proposições quaisquer.

(a) Se $2 + 2 = 4$ então 5 é impar.

(b) $3 + 1 = 4$ e $5 + 3 = 8$ implica $3 + 1 = 4$.

(c) $3 + 1 = 4$ e $5 + 3 = 8$ implica $3 + 2 = 5$.

(d) Vermelho é amarelo ou vermelho não é amarelo.

(e) Vermelho é azul ou vermelho é vermelho.

(f) 4 é ímpar ou 2 é par e 2 é ímpar implica 4 é ímpar.

(g) 4 é impar ou 2 é par e 2 é ímpar implica 4 é par.

Exercício 3.12. Sejam p, q e r proposições quaisquer e $P(p, q, r)$ e $Q(p, q, r)$ proposições compostas. Determine se é possível formar a proposição composta $P(p, q, r)$ combinando as proposições $p \vee q$, $r \to \neg q$ e p com os operadores lógicos elementares $\vee, \wedge$ e $\neg$ de modo que $P(p, q, r) \Rightarrow Q(p, q, r)$ para cada um dos seguintes casos:

(a) $Q(p, q, r) = q$.

(b) $Q(p, q, r) = r$.

(c) $Q(p, q, r) = \neg r$.

(d) $Q(p, q, r) = \neg(\neg q \wedge r)$.

(e) $Q(p, q, r) = q \to r$.

(f) $Q(p, q, r) = p \to (q \vee r)$.

Justifique sua resposta.