LIÇÃO 2

CONDICIONAL

2.1 Implicação

É comum formarmos proposições da forma "se p então q", por exemplo:

(a) **Se** o meu salário for pago hoje, **então** eu irei ao cinema.

(b) **Se** o desconto for de dez porcento, **então** eu comprarei este tênis.

(c) **Se** o pagamento for à vista, **então** você terá dez porcento de desconto.

(d) **Se** você decidir sair hoje, **então** ligue para mim.

Seguindo o nosso senso comum, podemos fazer as seguintes análises:

(a) *Se o meu salário for pago hoje, então eu irei ao cinema.*

Análise: Se o salário foi pago, então todos nós esperamos que a pessoa cumpra o que prometeu, ou seja, de ir ao cinema. Caso contrário, diremos que a pessoa não disse a verdade e, neste caso, a condicional é dita ser falsa. Por outro lado, se o pagamento não foi feito, ninguém espera que a pessoa vá ao cinema, isto é, ela não tem a obrigação de ir ao cinema. Neste caso, ela pode ir ou não. Note que, em ambos os casos não mais diremos que a pessoa não disse a verdade, já que o pagamento não foi feito e, consequentemente, a condicional é considerada verdadeira.

(b) *Se o desconto for de dez porcento, então eu comprarei este tênis.*

Análise: Se o vendedor faz o desconto de 10%, todos nós esperamos que o cliente realmente cumpra o que prometeu, ou seja, de comprar o tênis. Caso contrário, afirmaremos com toda certeza que o cliente não disse a verdade e, neste caso, a condicional é considerada falsa. Por outro lado, se o vendedor não faz o desconto de 10%, ninguém espera que o cliente compre o tênis, ou seja, ele não tem a obrigação de comprar. Porém, o cliente pode comprar ou não. Note que em ambos os casos, a condicional não será considerada falsa, uma vez que, o desconto pedido pelo cliente não foi concedido pelo vendedor.

(c) *Se o pagamento for à vista, então você terá dez porcento de desconto.*

Análise: Se o cliente decide comprar à vista, com certeza ele vai exigir o desconto de 10% prometido pelo vendedor. É evidente que se o cliente paga a vista e o vendedor não concede o desconto de 10%, o cliente dirá que ele foi enganado, ou seja, a condicional dita pelo vendedor será considerada falsa. Se o cliente não tem dinheiro para comprar à vista, então ninguém espera que o cliente obtenha 10% de desconto. Neste caso, o vendedor pode ou não conseguir com o gerente algum desconto. É muito importante observar que no caso do pagamento não ser a vista, ninguém dirá que a condicional dita pelo vendedor foi enganosa, deste modo, a condicional é dita ser verdadeira.

(d) *Se você for sair hoje, então ligue para mim.*

Análise: Se a pessoa decide ficar em casa, ela não precisa ligar avisando. Porém ela pode ligar para o amigo dizendo que realmente não vai sair. Por outro lado, se a pessoa resolve sair, ela tem a obrigação de ligar para o amigo avisando. Caso contrário, a amizade pode não ser mais a mesma!

Em resumo, na condicional, "se p então q", sempre que ocorre a veracidade de p, é obrigatório a ocorrência da veracidade de q. E, sempre que não ocorre a veracidade de p, aceitamos a ocorrência ou não da veracidade de q. Diz então o senso comum que a condicional, "se p então q", somente será falsa se p for verdadeira e q falsa. Com estes fatos em mente, vamos apresentar a definição de uma condicional.

Definição 2.1 (Condicional)**.** *Sejam p e q proposições, a condicional das proposições p e q é a proposição composta dada por: "se p então q", denotada por:*

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Tabela 2.1: Tabela Verdade de $p \to q$.

$p \to q$, que se lê: "p condiciona q", assume o valor lógico falso somente quando p for verdadeira e q for falsa e será verdadeira nos demais casos.

Em uma condicional $p \to q$, a proposição p é chamada *antecedente, premissa* ou *hipótese*, e a proposição q é referida como *consequente, conclusão* ou *tese*. A Tabela 2.1 apresenta os valores lógicos da condicional $p \to q$.

Exemplo 2.1. Analise o valor lógico das condicionais abaixo:

(a) Se o céu é azul, então o planeta Terra é uma grande bola azul.

p : o céu é azul.

q : o planeta Terra é uma grande bola azul.

As proposições p e q são ambas verdadeiras, logo a condicional é verdadeira.

(b) Se o céu é azul, então o planeta Terra é uma grande bola verde.

p : o céu é azul.

q : o planeta Terra é uma grande bola verde.

A proposição p é verdadeira e a proposição q é falsa, logo a condicional é falsa.

(c) Se o céu é verde, então o planeta Terra é uma grande bola azul.

p : o céu é verde.

q : o planeta Terra é uma grande bola azul.

A proposição p é falsa, portanto a condicional é verdadeira.

(d) Se o céu é verde, então o planeta Terra é uma grande bola verde.

p : o céu é verde.

q : o planeta Terra é uma grande bola verde.

A proposição p é falsa, logo a condicional é verdadeira.

É importante observar que numa condicional verdadeira, o consequente pode ser tanto falso como verdadeiro (Exemplo 2.1, itens a), c) ou d)). Contudo, se uma implicação é verdadeira e o antecedente é verdadeiro, então o consequente necessariamente deve ser verdadeiro. Esse é o princípio básico por trás de um teorema matemático: Se sabemos que um teorema (uma condicional) é correto (verdadeiro) e as hipóteses do teorema foram satisfeitas (o antecedente é verdadeiro), então podemos aceitar a conclusão do teorema como verdadeira.

Observação 2.1. Existem muitas formas de expressar a condicional $p \to q$ em português. Abaixo são apresentados alguns exemplos, todos equivalentes:

(a) Se p, então q.

(b) p implica q.

(c) q se p.

(d) p é suficiente para q.

De fato, se a condicional $p \to q$ é verdadeira, então a veracidade de p é suficiente para garantir a veracidade de q.

(e) q é necessário para p.

Com efeito, se $p \to q$ é verdadeira e a proposição q também é verdadeira, então a proposição p necessariamente deve ser verdadeira.

(f) Uma condição necessária para p é q.

(g) Uma condição suficiente para q é p.

2.2 Recíproca, Contrapositiva e Inversa de uma Condicional

Dada uma condicional $p \to q$, podemos formar as seguintes condicionais:

(i) $q \to p$, chamada *recíproca*.

(ii) $\neg q \to \neg p$, chamada *contrapositiva*.

(iii) $\neg p \to \neg q$, chamada *inversa*.

p	q	$q \to p$
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

p	q	$\neg q \to \neg p$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p	q	$\neg q \to \neg p$
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

Tabela 2.2: Tabela-verdade da recíproca $q \to p$, contrapositiva $\neg q \to \neg p$ e da inversa $\neg p \to \neg q$.

A tabela-verdade da recíproca, contrapositiva e inversa da condicional $p \to q$ são apresentadas na Tabela 2.2.

Exemplo 2.2. Considere a condicional *"Se chover, então o quintal fica molhado"*. A recíproca, contrapositiva e inversa dessa proposição são:

> *Recíproca:* Se o quintal está molhado, então choveu.
>
> Nesse exemplo, a recíproca tem uma interpretação lógica muito diferente da condicional original. De fato, ela é falsa se alguém lavar o quintal num dia de sol!
>
> *Contrapositiva:* Se no quintal não está molhado, então não choveu.
>
> A contrapositiva apresenta uma conclusão verdadeira e, do ponto de vista lógico, é equivalente a proposição original. Retornaremos a esse assunto nas próximas lições.
>
> *Inversa:* Se não choveu, o quintal não fica molhado.
>
> Assim com a recíproca, a inversa também tem uma interpretação lógica muito diferente da condicional original. Com efeito, a inversa também é falsa se um cano estourar e molhar o quintal num dia de sol!

Um erro muito comum em lógica é confundir a condicional com sua recíproca ou inversa.

Exemplo 2.3. Em seu livro sobre os fundamentos da matemática abstrata, David Kurtz descreve a seguinte conversa [13]:

> Um amigo meu lembrou-se que sentia sono sempre que estudava lógica. Respondi que ele parecia com sono no momento

e ele respondeu: "Sim, estou com sono". E acrescentou: "Portanto, você pode concluir que eu estava estudando lógica". Repliquei rapidamente: "Certamente não! Esse é um bom exemplo de um argumento inválido. Podemos concluir, contudo, que se você esta estudando lógica, então você não aprendeu muito bem".

Nesse exemplo, temos a condicional *"Se estuda lógica, então sente sono"*. Sua recíproca, contrapositiva e inversa são:

Recíproca: Se sente sono, então estuda lógica.

Contrapositiva: Se não sente sono, então não estudou lógica.

Inversa: Se não estuda lógica, então não sente sono.

Note que o amigo de Kurtz confundiu a condicional com a inversa.

Exemplo 2.4. Considere a propaganda baseada na seguinte condicional: "Se você usar o sabão em pó clean, então suas roupas ficarão brancas". A contrapositiva, recíproca e inversa dessa condicional são, respectivamente:

Recíproca: Se suas roupas estão brancas, então você usou o sabão em pó clean.

Contrapositiva: Se suas roupas não estão brancas, então você não usou o sabão em pó clean.

Inversa: Se você não usar o sabão em pó clean, então suas roupas não ficarão brancas.

Quem não é familiar com a condicional pode confundir a condicional do anuncio com sua inversa, ou seja, *se não usarmos clean, nossas roupas não ficarão brancas*. Contudo, podemos utilizar outro sabão em pó e ainda ter roupas brancas.

Apresentamos no exemplo abaixo a recíproca, contrapositiva e a inversa das condicionais apresentadas no início da lição:

Exemplo 2.5. (a) *Condicional:* Se meu salário for pago hoje, então eu irei ao cinema.

Recíproca: Se eu for ao cinema, então meu salário será pago hoje.

Contrapositiva: Se eu não for ao cinema, então meu salário não foi pago hoje.

Inversa: Se meu salário não for pago hoje, então eu não irei ao cinema.

(b) *Condicional:* Se o desconto for de 10%, então comprarei o tênis.

Recíproca: Se eu comprar o tênis, então o desconto será de 10%.

Contrapositiva: Se eu não comprar o tênis, então o desconto não foi de 10%.

Inversa: Se o desconto não for de 10%, então não comprarei o tênis.

(c) *Condicional:* Se o pagamento for à vista, então você terá 10% de desconto.

Recíproca: Se o desconto for de 10%, então o pagamento deverá ser à vista.

Contrapositiva: Se o desconto não for de 10%, então o pagamento não foi à vista.

Inversa: Se o pagamento não for à vista, então você não terá 10% de desconto.

(d) *Condicional:* Se você for sair hoje, ligue para mim.

Recíproca: Se você ligar para mim, então você decidiu sair hoje.

Contrapositiva: Se você não ligar para mim, então você decidiu não sair hoje.

Inversa: Se você decidiu não sair hoje, então não ligue para mim.

2.3 Bicondicional

Na Matemática, formarmos proposições da forma *"p se, e somente se, q"*. Este fato ocorre quando a condicional $p \to q$ e sua recíproca $q \to p$ são simultaneamente verdadeiras. Neste caso, devemos ter ambas p e q verdadeiras, ou ambas p e q falsas. Formalmente, temos a definição:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Tabela 2.3: Valores lógicos da bicondicional $p \leftrightarrow q$.

Definição 2.2 (Bicondicional)**.** *Sejam p e q proposições, a bicondicional das proposições p e q é a proposição composta dada por, "p se, e somente se, q", denotada por:* $p \leftrightarrow q$*, que se lê: "p bicondiciona q", assume o valor lógico verdadeiro somente quando p e q forem verdadeiras ou p e q forem falsas, e será falsa nos demais casos.*

A Tabela 2.3 apresenta todos os valores lógicos da bicondicional.

Exemplo 2.6. Para ser aprovado diretamente (sem a necessidade de fazer exame) no curso de elementos, um aluno de nossa universidade deve concluir a disciplina com nota final maior ou igual a 6,0. Em termos matemáticos, aplicamos a condicional "Se a nota final for maior ou igual a 6,0, então o aluno é aprovado diretamente". Todavia, se o aluno não tirar nota maior ou igual 6,0, ele não é aprovado diretamente. Portanto, a recíproca da condicional também é empregada. Em outras palavras, podemos dizer que "O aluno é aprovado diretamente se, e somente se, sua nota final é maior ou igual a 6,0."

Observação 2.2. Em português, podemos expressar a bicondicional $p \leftrightarrow q$ como segue:

(a) p se, e somente se, q.

Essa expressão pode ser abreviada da seguinte forma: p sse q.

(b) p é necessário e suficiente para q.

(c) p e q são equivalentes.

2.4 Exercícios Propostos

Exercício 2.1. Determine o valor lógico das seguintes condicionais:

(a) Se 2+1=4, então 3+2=5.

(b) Vermelho é verde se, e somente se, branco é azul.

(c) 2+1=3 e 3+1=5 implicam 4 é impar.

(d) Se 4 é impar, então 5 é impar.

(e) Se 4 é impar, então 5 é par.

(f) Se 5 é impar, então 4 é impar.

(g) Se $1 < 0$, então $1 + 1 = 1$.

Exercício 2.2. Dê exemplo ou esclareça por que tal exemplo não existe em cada um dos casos:

(a) Uma condicional verdadeira com um consequente falso.

(b) Uma condicional verdadeira com um consequente verdeiro.

(c) Uma condicional falsa com um consequente verdadeiro.

(d) Uma condicional falsa com um consequente falso.

(e) Uma condicional verdadeira com um antecedente falso.

(f) Uma condicional verdadeira com um antecedente verdadeiro.

(g) Uma condicional falsa com um consequente verdeiro.

(h) Uma condicional falsa com um antecedente falso.

Exercício 2.3. Encontre e escreva a tabela-verade de:

(a) A contrapositiva de $\neg p \to q$.

(b) A recíproca de $\neg q \to p$.

(c) A inversa da contrapositiva de $p \to q$.

(d) A recíproca da inversa de $\neg q \to p$.

(e) A inversa de recíproca de $q \to \neg p$.

(f) A contrapositiva da inversa de $p \to q$.

Exercício 2.4. Escreva em símbolos: "p sempre que q".

Exercício 2.5. Suponha que p, $\neg q$ e r são proposições verdadeiras. Determine o valor lógico das seguintes proposições compostas:

(a) $p \to q$.

(b) $q \to p$.

(c) $p \to (q \vee r)$.

(d) $p \leftrightarrow q$.

(e) $p \leftrightarrow r$.

(f) $(p \vee q) \to p$.

(g) $(p \wedge q) \to q$.

(h) $(p \to q) \to r$.

(i) $(p \vee q) \to (p \wedge q)$.

(j) $(p \wedge r) \leftrightarrow \neg q$.