LIÇÃO 1

INTRODUÇÃO À LÓGICA MATEMÁTICA

1.1 Proposição

A lógica matemática é constituída de *proposições*, que são frases declarativas que expressam pensamentos de sentido completo, as quais podemos classificar em verdadeiras ou falsas. Por exemplo, são verdadeiras as proposições:

(a) Dados dois pontos distintos existe uma única reta que os contém.

(b) Num triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é a soma dos quadrados das medidas dos catetos.

(c) $2 > 1$ (o número dois é maior que o número 1).

(d) 2 é o único número primo[1] que é par[2].

(e) $\sqrt{3}$ é um número irracional.

(f) A área de um retângulo é o produto da medida de sua base pela medida de sua altura.

(g) A área de um triângulo é a metade do produto da medida de sua base pela medida de sua altura.

[1] Um número natural $n > 1$ é primo se os seus únicos divisores positivos são o 1 e ele próprio.

[2] Um número inteiro n é par se é divisível por 2, ou seja, existe um inteiro k tal que $n = 2k$.

É muito comum encontramos na lógica proposições que não são verdadeiras, ou seja, são falsas. A seguir apresentamos somente exemplos de proposições falsas:

(h) $2 + 2 = 5$ (dois mais dois é igual a cinco).

(i) $1 < 0$ (o número um é menor do que o número 0).

(j) A raiz quadrada do número dois é um número racional.

(k) Existe um número real x que satisfaz a equação $x^2 + 1 = 0$.

(l) A equação $x^2 = 2$ tem solução no conjunto dos números racionais.

Observe que uma frase declarativa de sentido completo pode ser representada apenas por símbolos matemáticos como ocorre nos itens (c), (h) e (i). A seguir apresentaremos frases que não são proposições:

(m) O número 2 é par?
Não é uma frase declarativa, é interrogativa, e portanto não é uma proposição.

(n) Feliz aniversário!
É uma frase exclamativa, logo não é uma proposição.

(o) $x^2 + 2x + 1 = 0$.
Sem saber o valor de x não podemos dizer se a equação é verdadeira ou falsa, portanto não é uma proposição.

(p) Ele é um jogador de futebol.
Não temos como afirmar se a frase é verdadeira ou falsa, pois não sabemos quem é "ele"; logo, não é uma proposição.

A lógica matemática clássica adota como princípios fundamentais do pensamento os seguintes axiomas[3]:

Axioma 1.1 (Não contradição). *Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.*

Axioma 1.2 (Terceiro excluído). *Toda proposição ou é verdadeira ou é falsa, isto é, verifica-se sempre um destes casos e nunca um terceiro.*

[3]Axiomas são resultados verdadeiros aceitos sem demonstração e que são fundamentais para o desenvolvimento da teoria.

A propriedade fundamental de uma proposição de ser verdadeira ou falsa é denominada *valor lógico* da proposição. Denotaremos o valor lógico verdadeiro pela letra V e o valor lógico falso pela letra F.

Observação 1.1. A sentença "Essa sentença é falsa" não é uma proposição, pois não é possível atribuir nenhum dos dois valores V ou F para ela.

Duas ou mais proposições podem ser combinadas para produzir novas proposições. Proposições formadas dessa forma são chamadas *proposições compostas*. Proposições que não podem ser dividas em outras proposições são referidas como *proposições simples* ou *atômicas*. Em geral, denotaremos uma proposição qualquer (simples ou composta) utilizando letras minúsculas como p, q e r. As letras maiúsculas P, Q e R serão usadas para representar proposições compostas. Quando for necessário, explicitaremos a lista de proposições simples envolvidas na formação da proposição composta. Por exemplo: $P(p,q)$ denota a proposição composta P que é formada pelas proposições p e q.

O valor lógico de uma proposição composta $P(p,q,\ldots,r)$ depende unicamente dos valores lógicos das proposições simples $p,q,\ldots,r$ que a compõe. Especificamente, o valor lógico de $P(p,q,\ldots,r)$ pode ser sempre expresso em termos de combinações do valor lógico de p, $q,\ldots,r$ com os operadores **e**, **ou** e **não**, chamados respectivamente *conjunção*, *disjunção* e *negação*. Por exemplo:

(a) $\sqrt{2}$ é irracional **e** 2 é racional.

(b) $x^2 = 2$ tem solução nos racionais **ou** nos irracionais.

(c) **Não** é verdade que $3 + 5 < 7$.

A seguir, vamos discutir em detalhes cada um desses operadores lógicos.

1.2 Conjunção

Frequentemente utilizamos o conectivo "**e**" para formarmos frases de sentido completo. Por exemplo:

(a) Primeiro irei para biblioteca estudar **e** depois para minha casa.

(b) Pelé foi jogador de futebol **e** Ayrton Senna foi piloto de Fórmula 1.

(c) 2 é um número par **e** 2 é um número primo.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Tabela 1.1: Tabela de valores lógicos da conjunção $p \wedge q$.

(d) Primeiro eu estudarei Lógica **e** depois Cálculo.

Quando utilizamos o conectivo "**e**" para formarmos uma nova frase de sentido completo, o que se espera é a veracidade de todas as proposições envolvidas; caso contrário, a nova proposição será considerada falsa. Formalmente, temos a seguinte definição:

Definição 1.1 (Conjunção)**.** *A conjunção da proposição p com a proposição q, denotada por $p \wedge q$, que se lê: "p e q", é uma nova proposição que assume o valor lógico verdadeiro somente quando p e q forem simultaneamente verdadeiras. Caso contrário, $p \wedge q$ assume o valor lógico falso.*

Segue dos Axiomas 1.1 e 1.2 que uma proposição qualquer p, somente pode ser verdadeira ou falsa, não podendo ser as duas coisas simultaneamente. Deste modo, existem $2 \times 2 = 4$ possibilidades de valores lógicos para uma proposição composta por duas proposições, a saber:

(1) p verdadeira e q verdadeira.

(2) p verdadeira e q falsa.

(3) p falsa e q verdadeira.

(4) p falsa e q falsa.

Com estas 4 possibilidades e, juntamente com a Definição 1.1, podemos construir a Tabela 1.1 que contém todas as possibilidades de valores lógicos para a conjunção. A Tabela 1.1 é um exemplo de tabela-verdade. Especificamente, tem-se:

Definição 1.2 (Tabela-verdade)**.** *A tabela que contém todas as possibilidades de valores lógicos de uma proposição é chamada de tabela-verdade.*

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabela 1.2: Tabela-verdade da disjunção $p \vee q$.

1.3 Disjunção

Diariamente formamos frases declarativas com o conectivo "**ou**". Por exemplo:

(a) Vou estudar na biblioteca **ou** na minha casa.

(b) Pelé **ou** Maradona foram os melhores jogadores de futebol do século vinte.

(c) Um número inteiro qualquer é par **ou** é ímpar.

(d) Hoje irei estudar Lógica **ou** Cálculo.

Quando utilizamos o conectivo "**ou**" para formarmos uma nova frase de sentido completo, esperamos que pelo menos uma das proposições seja verdadeira; ninguém espera que todas as proposições envolvidas sejam falsas. Deste modo, parece razoável considerar a nova proposição falsa somente quando todas as proposições envolvidas são falsas; caso contrário, a nova proposição será verdadeira. Com estes fatos em mente, enunciamos:

Definição 1.3 (Conjunção)**.** *Sejam p e q proposições, a disjunção das proposições p e q, denotada por $p \vee q$, que se lê: "p ou q", é uma nova proposição que assume o valor lógico falso somente quando p e q forem simultaneamente falsas. Caso contrário, $p \vee q$ assume o valor lógico verdadeiro.*

A Tabela 1.2 apresenta todas as possibilidades de valores lógicos da disjunção $p \vee q$.

1.4 Negação

Ao ouvirmos uma frase de sentido completo cujo valor lógico é falso, temos a tendência natural de fazer a sua negação. Por exemplo:

p	$\neg p$
V	F
F	V

Tabela 1.3: Tabela-verdade da negação de p.

(a) *Proposição:* 4 é primo.

Negação da Proposição: 4 não é primo.

(b) *Afirmação:* $(8-3)^2 = 8^2 - 3^2$.

Negação da Proposição: $(8-3)^2 \neq 8^2 - 3^2$.

(c) *Afirmação:* O raciocínio lógico não é importante.

Negação da Proposição: O raciocínio lógico é importante.

Observe que, se uma proposição qualquer p tem valor lógico falso, então sua negação terá valor lógico verdadeiro. Dualmente, se p tem valor lógico verdadeiro, então sua negação terá valor lógico falso.

Definição 1.4 (Negação)**.** *Dada uma proposição p, a negação de p, denotada por $\neg p$, que se lê: "não p", é uma proposição com valor lógico contrário ao valor lógico de p.*

A Tabela 1.3 apresenta os valores lógicos da negação de p.

Exemplo 1.1. Considere as proposições:

(a) A neve é branca.

(b) É falso que a neve é branca.

(c) A neve não é branca.

A proposição do item (a) é verdadeira e as proposições dos itens (b) e (c) são as negações dela. Sendo a primeira proposição verdadeira, as duas últimas proposições são falsas.

Exemplo 1.2. Considere as proposições:

(a) $\pi > 4$.

(b) É falso que π é maior do que 4.

(c) π não é maior do que 4.

(d) $\pi \not> 4$. (que se lê: pi não é maior do que 4)

A proposição do item (a) é falsa e as proposições dos itens (b), (c) e (d) são as negações dela. Logo, as últimas três proposições são verdadeiras.

Observação 1.2. O símbolo "$\neg$" é empregado na lógica de modo similar ao símbolo "$-$" na álgebra. Por exemplo, $\neg p \vee q$ representa $(\neg p) \vee q$, e não $\neg(p \vee q)$.

1.5 Exercícios Propostos

Exercício 1.1. Identifique abaixo as frases que são proposições e as que não são. Justifique suas conclusões.

(a) Em 22 de abril de 1500, descobriu-se o Brasil.

(b) Moisés encheu uma arca com vários casais de animais.

(c) O número $2^{10} + 21$ é primo.

(d) O número 2 é par?

(e) Feliz aniversário!

(f) $x^2 + 2x + 1 = 0$.

(g) A raiz quadrada do número 2 é um número irracional.

(h) O número 2 é o único número inteiro que é par e primo?

(i) Ela é uma atriz de cinema.

(j) Navegar é preciso.

(k) Em um triângulo, o quadrado da medida do maior lado é igual a soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados.

Exercício 1.2. Determine o valor lógico das seguintes proposições:

(a) $3 \leq 7$ e 4 é um número ímpar.

(b) $3 \leq 7$ ou 4 é um número ímpar.

(c) 5 é impar ou divisível por 4.

(d) $3 \geq 3$.

Exercício 1.3. Considere as seguintes proposições:

p: 3 é um número par.

q: $1 + 1 = 2$.

r: 12 é divisível por 6.

(a) Escreva em notação simbólica as seguintes sentenças:

(i) $1 + 1 \neq 2$ e 12 é divisível por 6.

(ii) Não é verdade que 3 é par ou $1 + 1 = 2$.

(iii) $1 + 1 = 2$ e 12 não é divisível por 6.

(b) Escreva em português as seguintes proposições e determine seus respectivos valores lógicos:

(i) $p \vee \neg q$.

(ii) $\neg(r \wedge q)$.

(iii) $\neg r \vee \neg q$.

Exercício 1.4. Escreva, em português, a negação das seguintes proposições:

(a) $3 - 4 < 7$.

(b) $3 + 1 = 5$ e $2 \leq 4$.

(c) 8 é divisível por 3 ou por 2.

Exercício 1.5. Escreva em notação simbólica a sentença "21 é divisível por 3 **mas** não por 2". O termo "mas" corresponde a qual operador lógico?

Os próximos exercícios têm como objetivo mostrar que o português permite sentenças ambíguas que não são aceitáveis na linguagem matemática.

Exercício 1.6. Considere as proposições:

p: $1 + 1 = 2$.

q: $2 + 2 < 3$.

Escreva, em português, as proposições compostas $(\neg p) \vee q$ e $\neg(p \vee q)$.

Exercício 1.7. Escreva em linguagem matemática as seguintes proposições e determine seu valor lógico:

(a) Não é verdade que $2 + 2 = 5$ e $5 > 7$.

(b) Não é verdade que $2 + 2 = 5$ ou $5 > 7$.

Exercício 1.8. Explique a seguinte piada:
Ancioso o pai pergunta ao parteiro: "Doutor, é homem ou mulher?" O médico responde: "Sim".

Exercício 1.9. No português, o termo "ou" frequentemente é usado com sentido exclusivo. Por exemplo, na frase: "Quando você me ligou eu estava tomando banho ou passeando com o cachorro", não é permitido ambas possibilidades (tomar banho e passear com o cachorro simultaneamente). Esse tipo de situação é descrito na lógica utilizando o operador *ou-exclusivo*, denotado por "$\oplus$". Especificamente, dadas duas proposições p e q, a proposição composta $p \oplus q$ é verdadeira quando somente uma das duas proposições p ou q é verdadeira, e falsa caso contrário. Escreva a tabela verdade do ou-exclusivo.

Exercício 1.10. Explique o papel lógico do conectivo "e/ou" na frase: "*São considerados docentes permanentes os professores que desenvolvam atividades de ensino na graduação* **e/ou** *pós-graduação.*" Escreva essa afirmação em linguagem matemática.

Exercício 1.11. Suponha que definimos um operador lógico $\star$ da seguinte forma: Dadas duas proposições p e q, a proposição composta $p \star q$ é verdadeira quando p é falsa e q é verdadeira, e falsa nos demais casos. Escreva a tabela verdade do operador $\star$.