LISTA 1 CONJUNTOS

1 Explique a seguinte piada: Ansioso, o pai pergunta ao parteiro: "Doutor, é homem ou mulher?" O médico responde: "Sim".

2 Fernando Pessoa escreveu "Todo cais é uma saudade de pedra". Em Suazilândia não há nenhum cais. O que acham os suazilandeses sobre o verso de Fernando Pessoa?

3 Indique quais das seguintes afirmações são equivalentes a "Se beber, não dirija":

a) Se não dirigir, beba.
b) Não beba nem dirija.
c) Não beba ou não dirija.
d) Beba e não dirija.
e) Se não beber, dirija.
f) Se dirigir, não beba.

4 Sejam A, B e C conjuntos. Prove as seguintes proposições:

a) $A \subset A \cup B$.

b) $A \cap B \subset A$.

c) $A - B \subset A$.

d) $A \cap B \subset A \cup B$.

e) $B - (B - A) = A \cap B$.

f) $A \cap (B - A) = \emptyset$.

g) $A \cup (B - A) = A \cup B$.

h) $A \cup (A \cap B) = A$.

i) $C - (A \cup B) = (C - A) \cap (C - B)$.

j) $C - (A \cap B) = (C - A) \cup (C - B)$.

k) $(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$.

l) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

m) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

n) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$.

5 Sejam A, B, C e D conjuntos. Para cada um dos seguintes teoremas enuncie em português a hipótese e a tese e prove cada um deles:

a) $A \subset B$ e $B \subset C \Longrightarrow A \subset C$.

b) $A \subset (C - B) \Longrightarrow A \cap B = \emptyset$.

c) $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow B = (A \cup B) - A$.

d) $A \subset C$ e $B \subset D \Longrightarrow A \cup B \subset C \cup D$.

e) $A \subset B \Longrightarrow A \cap (C - B) = \emptyset$.

f) $A \cup B \neq \emptyset \Longleftrightarrow A \neq \emptyset$ ou $B \neq \emptyset$.

g) $A \cap C = \emptyset \Longrightarrow A \cap (B \cup C) = A \cap B$.

h) $A \subset B \Longrightarrow A = B - (B - A)$.

i) $A \cup B \subset A \cap B \Longrightarrow A = B$.

j) $A \subset \emptyset \Longleftrightarrow A = \emptyset$.

k) $A \subset B \Longleftrightarrow A \cup B = B$.

l) $A \subset C$ e $B \subset C \Longleftrightarrow A \cup B \subset C$.

m) $A - B \subset B \Longleftrightarrow A - B = \emptyset$.

n) $(A \cap C = A \cap B)$ e $(A \cup C = A \cup B) \Longrightarrow B = C$.

$\boxed{6}$ Sejam A, B, C e D conjuntos. Prove ou dê um contra-exemplo para as seguintes proposições:

a) $B \subset C \Longrightarrow A \cap B \subset A \cap C$.

b) $A \cap B \subset A \cap C \Longrightarrow B \subset C$.

c) $A \subset B$ e $C \subset D \Longrightarrow A \times C \subset B \times D$.

d) $A \neq \emptyset$ e $A \times B \subset A \times C \Longrightarrow B \subset C$.

e) $A \neq \emptyset$ e $A \times B = A \times C \Longrightarrow B = C$.

f) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

g) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

h) $A \times (B - C) = A \times B - A \times C$.

i) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

j) $(A \times B) \cap ((C - A) \times B) = \emptyset$.

k) $A \cup (B \times C) = (A \cup B) \times (A \cup C)$.

l) $A \cap (B \times C) = (A \cap B) \times (A \cap C)$.

m) $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow (A \times C) \cap (B \times C) = \emptyset$.

LISTA 3 NÚMEROS INTEIROS

$\boxed{1}$ Sejam x, y e z inteiros. Para as conjecturas abaixo, prove as verdadeiras e mostre contra-exemplos para as falsas:

a) Se $4x$ é par então x é par.

b) Se x é ímpar então $4x$ é ímpar.

c) Se $3x$ é par então x é par.

d) Se y é par então y^2 é par.

e) Se y^2 é ímpar então y é ímpar.

f) Se $x + y + z$ é ímpar então o número de inteiros ímpar em $[x,\ y,\ z]$ é ímpar.

$\boxed{2}$ Prove que para todo inteiro x se $5x - 7$ é ímpar então $9x + 2$ é par.

$\boxed{3}$ Sejam u e v inteiros. Prove que:

(a) Se uv é ímpar então $u^2 + v^2$ é par.

(b) Se uv e $u + v$ são pares (ou ímpares) então u e v são pares.

$\boxed{4}$ Sejam a e b inteiros não divisíveis por 3. Prove que $a^2 - b^2$ é divisível por 3.

$\boxed{5}$ Sejam p, q e r inteiros. Prove que:

(a) Se p e q são divisíveis por r então $p + q$ é divisível por r.

(b) Se p é divisível por r então $p \cdot q$ é divisível por r.

(c) Se p é divisível por r e $q > 0$ então p^q é divisível por r.

$\boxed{6}$ Sejam p, q, r e s inteiros. Prove que:

(a) $10p + q$ é divisível por 3 se e somente se $p + q$ é divisível por 3.

(b) $100p + 10q + r$ é divisível por 3 se e somente se $p + q + r$ é divisível por 3.

(c) $100p + 10q + r$ é divisível por 4 se e somente se $10q + r$ é divisível por 4.

(d) $1000p + 100q + 10r + s$ é divisível por 4 se e somente se $10r + s$ é divisível por 4.

$\boxed{7}$ A representação decimal (base 10) de um inteiro positivo x com $n+1$ algarismos, $a_n a_{n-1} ... a_1 a_0$, é tal que $x = a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + \cdots + a_1.10 + a_0$, onde $a_i \in \{0, 1, ..., 9\}$, $i = 0, 1, ..., n$ e $a_n \neq 0$. Por exemplo, $1357 = 1 + 3.10 + 5.10^2 + 7.10^3$. Inspirado no Exercício 6, prove os seguintes critérios de divisibilidade:

(a) um inteiro é divisível por 3 se e somente se a soma de seus algarismos é divisível por 3.

(b) um inteiro é divisível por 9 se e somente se a soma de seus algarismos é divisível por 9.

(c) um inteiro é divisível por 4 se e somente se o número formado apenas pelas dezenas e unidades for divisível por 4.

(d) um inteiro é divisível por 8 se e somente se o número formado apenas pelas centenas, dezenas e unidades for divisível por 8.

$\boxed{8}$ Prove que não existem inteiros x e y tais que $15x + 33y = 28$.

$\boxed{9}$ Prove que não existe um inteiro x tal que $12x^3 - 7x^2 - 2x + 5 = 0$.

$\boxed{10}$ Encontre um inteiro de quatro algarismos que é um quadrado perfeito e tal que se adicionarmos 1 a cada um dos quatro algarismos obtemos outro quadrado perfeito.

$\boxed{11}$ Prove, usando o `Algoritmo da Divisão`, que todo número racional tem uma expressão decimal finita ou periódica. Prove que o número cuja expansão decimal é dada por $0,101001000100001000001000000 1\ldots$ não é racional.

$\boxed{12}$ Seja n um inteiro positivo. Prove que dados quaisquer inteiros $a_1, a_2, \ldots, a_n$, podemos sempre escolher alguns deles de forma que a soma seja divisível por n. **Sugestão:** convença-se, primeiro, de que esta proposição é verdadeira escrevendo vários exemplos. Para fazer a prova, inspire-se em $a_1, a_1 + a_2, \ldots, a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

$\boxed{13}$ Prove que para qualquer n inteiro positivo existem n inteiros consecutivos e não primos. **Sugestão:** Considere os inteiros $(n+1)! + 2,\ (n+1)! + 3,\ \ldots$.