5.7 Exercícios Propostos

Exercício 5.1 Sejam os conjuntos $A = \{a, b\}$, $B = \{2, 3\}$ e $C = \{3, 4\}$. Determine:
(a) $A \times (B \cup C)$. (b) $(A \times B) \cup (A \times C)$.
(c) $A \times (B \cap C)$. (d) $(A \times B) \cap (A \times C)$.

Exercício 5.2 Calcular $(S \times W) \cap (S \times V)$, sabendo que $S = \{a, b\}$, $W = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $V = \{3, 5, 7, 9\}$.

Exercício 5.3 Por definição $A \times B \times C = \{(a, b, c) : a \in A, b \in B \text{ e } c \in C\}$. Considere os conjuntos $A = \{0, 1\}$, $B = \{1\}$ e $C = \{0, 1\}$ obtenha $A \times B \times C$.

Exercício 5.4 Prove a veracidade dos seguintes resultados:
(a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.
(b) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.
(c) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$.
(d) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.
(e) Se $A \subset B$ e $C \subset D$ então $(A \times C) \subset (B \times D)$.

Exercício 5.5 Sejam A e B dois conjuntos. Prove que, se $B \neq \emptyset$ e $A \times B \subset B \times A$ então $A \subset B$.

Exercício 5.6 Dados os conjuntos $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$, prove que: $A \times B = B \times A$ se, e somente, se $A = B$.

Exercício 5.7 Dados os conjuntos $A = \{1\}$ e $B = \{a, b\}$, obtenha todas as possíveis relações de A em B e de B em A. Observe que basta determinar os conjuntos $P(A \times B)$ e $P(B \times A)$. ($P(X)$ é o conjunto das partes de X).

Exercício 5.8 Seja R uma relação de A em B. Por definição o domínio da relação R é o conjunto, $Dom(R) = \{x \in A : xRy \text{ para algum } y \in B\}$, e a imagem da relação R, é o conjunto, $Im(R) = \{y \in B : xRy \text{ para algum } x \in A\}$. Faça a representação geométrica da relação R e determine $Dom(R)$ e $Im(R)$.
(a) $R = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : y = x^2\}$.
(b) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 - 6x + 5\}$.
(c) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2 \text{ e } y < x + 2\}$.
(d) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 25 \text{ e } y \geq \frac{4x^2}{9}\}$.
(e) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 25 \text{ ou } y > \frac{3x}{4}\}$.

Exercício 5.9 Seja a relação $R = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : x + 2y = 12\}$, faça:
(a) Escreva R por extensão, ou seja, explicite todos os seus elementos.
(b) Determine R^{-1} por extensão e por definição. (Note que R foi dada por definição)
(c) Determine $R \circ R$ e $R^{-1} \circ R$.

Exercício 5.10 Sejam R e S relações de A em B. Prove que:
(a) $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$.
(b) $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$.
(c) $(R - S)^{-1} = R^{-1} - S^{-1}$.

Exercício 5.11 Considere as relações $R \subset A \times B$ e $S \subset B \times C$. Demonstre que $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.

Exercício 5.12 Dadas as relações $R \subset A \times B$, $S \subset B \times C$ e $T \subset C \times D$. Mostre que $(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$.

Exercício 5.13 Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto e R uma relação em A. R é reflexiva em A se, e somente se, $I_A \subset R$.

Exercício 5.14 Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto e R uma relação em A. Mostre que, se R é uma relação de equivalência e de ordem em A então R^{-1} é uma relação de equivalência e de ordem em A.

Exercício 5.15 Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto qualquer e R uma relação em A. Prove que, se R é uma relação de equivalência em A então $R \circ R$ é uma relação de equivalência em A.

Exercício 5.16 Quais das relações abaixo são relações de equivalência sobre o conjunto A dado. Justifique suas respostas.
(a) $A = \{a, b, c\}$ e $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, c), (a, c)\}$.
(b) $A = \{a, b, c\}$ e $R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$.
(c) $A = \{a, b, c\}$ e $R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$.
(d) $A \neq \emptyset$ e a relação $R = A \times A$.

Exercício 5.17 Seja S uma relação em $\mathbb{N}$, definida por: $xSy \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z} : y = mx$.
(a) Prove que S é uma relação de Ordem em $\mathbb{N}$.
(b) S é uma relação de equivalência em $\mathbb{N}$? Justifique.

Exercício 5.18 Seja S uma relação em $\mathbb{R}$ definida por: $xSy \Leftrightarrow x = y$.
(a) Prove que S é uma relação de equivalência e de ordem em $\mathbb{R}$.
(b) Obtenha a classe de equivalência do elemento $a \in \mathbb{R}$.
(c) Obtenha o conjunto quociente $\mathbb{R}/S$.

Exercício 5.19 Seja F uma família de conjuntos e $R \subset F \times F$, definida por: $ARB \Leftrightarrow A \subset B$. Dados os Teoremas 8 e 9, prove que R é uma relação de ordem em F. Mostre que R não é uma relação de equivalência em F.

Teorema 8 *Sejam A e B conjuntos, se $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = B$.*

Teorema 9 *Sejam A, B e C conjuntos, se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$.*

Exercício 5.20 Dado $n \in \mathbb{N}$ e R uma relação em $\mathbb{Z}$ definida por: $xRy \Leftrightarrow n|(x - y)$.
(a) Prove que R é uma relação de equivalência em $\mathbb{Z}$.
(b) Considere $n = 2$ e $a \in \mathbb{Z}$, determine a classe de equivalência C_a.
(c) Obtenha as classes de equivalência: $\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{2}$ e $\overline{3}$ e o conjunto quociente $\mathbb{Z}/R$.

Exercício 5.21 Seja R uma relação em $\mathbb{R}$ definida por: xRy se, e somente se, $x-y$ é um número inteiro.
(a) Prove que R é uma relação de equivalência.
(b) Mostre que R não é uma relação de ordem.
(c) Seja $a \in \mathbb{R}$ determine a classe de equivalência C_a.

Exercício 5.22 Seja R uma relação em $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definida por: $(a,b)R(c,d)$ se, e só se, $a+d = b+c$.
(a) Prove que R é uma relação de equivalência.
(b) Mostre que R não é uma relação de ordem.
(c) Obtenha a classe de equivalência $C_{(0,1)}$ e faça a sua representação gráfica.

Exercício 5.23 Seja R uma relação em $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definida por: $(a,b)R(c,d)$ se, e só se, $a+b \leq c+d$, faça: (a) R é reflexiva? (b) R é simétrica? (c) R é Transitiva? (d) R é antissimétrica? (e) R é uma relação de equivalência em A? (f) R é uma relação de ordem em A? Justifique suas conclusões.

Exercício 5.24 Seja $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ e considere a relação R em A, definida por: $(a,b)R(c,d)$ se, e somente se, $ad = bc$. Mostre que R é uma relação de equivalência em A. Se $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ então R ainda será uma relação de equivalência em A? Justifique sua resposta.

Exercício 5.25 Sejam R e S relações de equivalência em A. Demonstre que:
(a) $C_a(R \cap S) = C_a(R) \cap C_a(S)$.
(b) Se $R \cup S$ é uma relação de equivalência, então $C_a(R \cup S) = C_a(R) \cup C_a(S)$.

Exercício 5.26 Seja R uma relação de equivalência em A. Prove que:
(a) $a \in C_a$ para todo $a \in A$.
(b) Se $a \in C_b$ então $C_a = C_b$.
(c) Se $a \notin C_b$ então $C_a \cap C_b = \emptyset$.
(d) Se $C_a \cap C_b = \emptyset$ então $C_a \neq C_b$.
(e) Se $C_a \cap C_b \neq \emptyset$ então $C_a = C_b$.
(f) $\bigcup\limits_{a \in A} C_a = A$.

Exercício 5.27 Sejam R uma relação de equivalência em A e as classes de equivalência C_a e C_b com $a, b \in A$. Dado o Teorema 10, aplique-o para provar o Teorema 11.
Teorema 10 *Sejam $x, y \in A$, se $x \in C_y$ então $C_x = C_y$.*
Teorema 11 *Sejam $a, b \in A$, se $C_a \cap C_b \neq \emptyset$ então $C_a = C_b$.*

Exercício 5.28 Sejam R uma relação de equivalência em A, C_a e C_b classes de equivalência. Dados os Teoremas 12 e 13, aplique-os para provar o Teorema 14.
Teorema 12 *Para todo $x \in A$, $x \in C_x$.*
Teorema 13 *Sejam $x, y \in A$, se $x \in C_y$ então $C_x = C_y$.*
Teorema 14 *Sejam $a, b \in A$, se $a \notin C_b$ então $C_a \cap C_b = \emptyset$.*