Lista 8 - Quadrados Mínimos, Transformações Ortogonais e Pseudo-inversa

Exercício 1. Dados vetores não-nulos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ em $\mathbb{R}^n$, determine a reflexão de Householder H tal que $H\mathbf{x}$ é um múltiplo de $\mathbf{y}$.

Exercício 2. Use reflexões de Householder para mostrar que $\det(I+\mathbf{x}\mathbf{y}^T) = 1+\mathbf{x}^T\mathbf{y}$ para quaisquer $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

Exercício 3. Considere vetores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Mostre que se $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é uma matriz ortogonal tal que

$$Q^T\mathbf{x} = \begin{bmatrix}\alpha \\ \mathbf{y}\end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Q^T\mathbf{y} = \begin{bmatrix}\beta \\ \mathbf{v}\end{bmatrix}, \tag{1}$$

então $\mathbf{u}^T\mathbf{v} = \mathbf{x}^T\mathbf{y} - \alpha\beta$.

Exercício 4. Determine $c = \cos\theta$ e $s = \sin\theta$ tais que

$$\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Exercício 5. Apresente uma forma geral para rotações e reflexões no plano. Dada uma matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, determine a rotação G e a reflexão H mais próximas de A. Sobre quais condições a rotação de G é mais próxima de A do que a reflexão H.

Exercício 6. Seja $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, com $posto(A) = n < m$, e $b \in \mathbb{R}^m$. Suponha que $A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$, $(A^TA + F)\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}$, e $2\|F\|_2 \leq \sigma_n^2$, onde σ_n denota o n-ésimo valor singular de A. Mostre que, se $\mathbf{r} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}$ e $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}$, então $\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}} = A(A^TA + F)^{-1}Fx$ e

$$\|\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}\|_2 \leq 2\kappa_2(A)\frac{\|F\|_2}{\|A\|_2}\|\mathbf{x}\|_2.$$

Exercício 7. A pseudo-inversa de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ é definida como segue onde $A = U\Sigma V^T$ representa de decomposição SVD de A:

$$A^\dagger = V\Sigma^\dagger U^T, \qquad \Sigma = diag\left(\frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2}, \ldots, \frac{1}{\sigma_r}, 0, \ldots, 0\right), \quad r = posto(A).$$

Mostre que $A^\dagger$ é a única solução do problema

$$\min_{X\in\mathbb{R}^{m\times n}} \|AX - I\|_F,$$

onde I_m denota a matriz identidade. Mostre também que a pseudo-inversa é a única matriz que satisfaz as quatro condições de *Moore-Penrose*:

$$\text{i) } AXA = A, \qquad \text{iii) } (AX)^T = AX, \tag{2}$$

$$\text{ii) } XAX = X, \qquad \text{iii) } (XA)^T = XA. \tag{3}$$