Lista 7 - Interpolação e Aplicações

Exercício 1. Determine o polinômio que interpola o conjunto de dados $\{(-1,1),(0,0),(1,1)\}$ utilizando:

a) A base dos monomios;

b) A base de Lagrange;

c) A base de Newton.

Verifique que as três representações fornecem de fato o mesmo polinômio interpolador.

Exercício 2. Dado um conjunto distinto de pontos $t_0, t_1, \ldots, t_n$, mostre que a matriz de Vandermonde $V = (t_i^j)$, para $i, j = 0, \ldots, n$, é não-singular.

Exercício 3. Determine o polinômio p_{16}, de grau 16, que interpola o seguinte conjunto de dados $\{(i,1) : i = 0, 1, \ldots, 16\}$.

Exercício 4. Dada uma partição $\pi : t_0 < t_1 < \ldots < t_n < t_{n+1}$ e pontos $y_0, y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}$, sejam q e r os polinômios de grau n que interpolam os conjuntos $\{(t_i, y_i) : i = 0, \ldots, n\}$ e $\{(t_i, y_i) : i = 1, \ldots, n+1\}$, respectivamente. Mostre que

$$p(t) = \frac{(t - t_0)r(t) - (t - t_{n+1})q(t)}{t_{n+1} - t_0}, \tag{1}$$

é o polinômio de grau $n+1$ que interpola os dados $\{(t_i, y_i) : i = 0, \ldots, n+1\}$.

Exercício 5. Construa o polinômio p_1, de grau 1, que interpola uma função contínua $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ nos pontos $t_0 = -1$ e $t_1 = 1$. Mostre que, se $f \in \mathcal{C}^2[-1,1]$, então

$$|f(t) - p_1(t)| \leq \frac{M_2}{2}(1 - t^2) \leq \frac{M_2}{2}, \quad \forall\, t \in [-1,1], \tag{2}$$

onde $M_2 = \max_{t \in [-1,1]} |f''(t)|$.

Exercício 6. Dada uma partição $\pi : t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ do intervalo $[a,b]$, defina as funções de Lagrange da seguinte forma para todo $i = 1, \ldots, n$:

$$\ell_i(t) = \prod_{j \neq i}^{n} \frac{t - t_j}{t_i - t_j}.$$

a) Mostre que $\{\ell_0, \ell_1, \ldots, \ell_n\}$ é uma base para $\mathcal{P}_n[a,b]$.

b) Mostre que, para todo $t \in [a,b]$, tem-se

$$\sum_{i=0}^{n} \ell_i(t) = 1.$$

c) Se $p \in \mathcal{P}_n[a,b]$ interpola uma função f nos pontos da partição π, então

$$f(t) - p(t) = \sum_{i=0}^{n} [f(t) - f(t_i)]\, \ell_i(t).$$

Exercício 7. Dada uma partição $\pi : t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ do intervalo $[a, b]$, defina $h = \max_{i=1,\ldots,n} (t_i - t_{i-1})$. Mostre que a seguinte desigualdade é válida para qualquer $t \in [a, b]$:

$$|(t - t_0)(t - t_1) \ldots (t - t_n)| \leq n! \frac{h^{n+1}}{4}. \tag{3}$$

Exercício 8 (Fórmulas de Newton-Cotes)**.** Suponha que desejamos calcular a integral $I = \int_a^b f(t)dt$, onde $f \in \mathcal{C}[a, b]$. As formulas de Newton-Cotes são obtidas substituindo a função f por seu polinômio interpolador p_n sobre uma partição $\pi : t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ de $[a, b]$. Dada uma base $\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n\}$ de $\mathcal{P}_n[a, b]$, mostre que a integral I pode ser aproximada pela soma $\sum_{i=0}^n \alpha_i f(t_i)$. Determine os valores de α_i com respeito a essa base.

Considere uma partição uniforme de $[a, b]$, i.e., $t_i = a+ih$, para $i = 0, 1, \ldots, n$, com $h = (b-a)/n$.

a) A regra dos trapézios é obtida quando $n = 1$. Mostre que a regra dos trapézios fornece a seguinte aproximação para a integral I:

$$\int_a^b f(t)dt \approx \frac{h}{2}[f(t_0) + f(t_1)].$$

b) A regra de Simpson é obtida quando $n = 2$. Mostre que a regra de Simpson fornece a seguinte aproximação para a integral I:

$$\int_a^b f(t)dt \approx \frac{h}{3}[f(t_0) + 4f(t_1) + f(t_2)].$$

Exercício 9. Seja $f \in \mathcal{C}^2[a, b]$. Mostre que existe $\xi \in (a, b)$ tal que o erro da regra dos trapézios satisfaz a equação:

$$\frac{1}{2}(b - a)(f(a) + f(b)) - \int_a^b f(t)dt = \frac{1}{12}(b - a)^3 f''(\xi). \tag{4}$$

Exercício 10. Seja $f \in \mathcal{C}^{n+1}[a, b]$ e suponha que desejamos estimar o valor da integral $I = \int_a^b f(t)dt$. Dada uma partição $\pi : t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ de $[a, b]$, mostre que o erro da aproximação $I_n = \int_a^b p_n(t)dt$, onde $p_n \in \mathcal{P}_n[a, b]$ é o polinômio interpolador de f sobre π, satisfaz a seguinte inequação

$$|I - I_n| \leq \frac{M_{n+1}}{(n + 1)!} \int_a^b |w(t)|dt, \tag{5}$$

onde $M_{n+1} = \max_{\xi \in [a,b]} |f^{n+1}(\xi)|$ e $w(t) = (t - t_0)(t - t_1) \ldots (t - t_n)$.

Exercício 11 (Fórmulas de Newton-Cotes Compostas)**.** Suponha que desejamos calcular a integral $I = \int_a^b f(t)dt$, onde $f \in \mathcal{C}[a, b]$. As formulas de Newton-Cotes compostas são obtidas substituindo a função f por seu polinômio interpolador por partes p_m sobre uma partição $\pi : t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ de $[a, b]$, com $n \geq m$.

Considere uma partição uniforme de $[a, b]$, i.e., $t_i = a+ih$, para $i = 0, 1, \ldots, n$, com $h = (b-a)/n$.

a) A regra dos trapézios composta é obtida quando $m = 1$. Mostre que a regra dos trapézios composta fornece a seguinte aproximação para a integral I:

$$\int_a^b f(t)dt \approx \frac{h}{2}\left[f(t_0) + 2f(t_1) + \ldots + 2f(t_{n-1}) + f(t_n)\right].$$

b) A regra de Simpson composta é obtida quando $m = 2$ e n é par. Mostre que a regra de Simpson composta fornece a seguinte aproximação para a integral I:

$$\int_a^b f(t)dt \approx \frac{h}{3}\left[f(t_0) + 4f(t_1) + 2f(t_2) + 4f(t_3) + \ldots + 2f(t_{n-2}) + 4f(t_{n-1}) + f(t_n)\right].$$

Exercício 12. Mostre que os polinômios de Chebyshev $T(t) = \cos(n \cos^{-1} t))$, para $t \in [-1, 1]$ e $n = 0, 1, \ldots$, satisfazem as seguintes propriedades:

a) $T_{n+1}(t) = 2tT_n(t) - T_{n-1}(t)$, $n = 1, 2, \ldots$;

b) T_n é uma função impar se n é impar e é uma função par se n é par;

c) O coeficiente da maior potência de T_n é 2^{n-1};

d) Os zeros de T_n são

$$t_j = \cos\frac{(2j-1)\pi}{2n}, \quad j = 1, \ldots, n$$

e, portanto, são todos distintos e pertencem ao intervalo $[-1, 1]$;

e) $|T_n(t)| \leq 1$ para todo $t \in [-1, 1]$;

Exercício 13. Considere uma função $f \in \mathcal{C}[0, 1]$. Determine um sistema linear que fornece os coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ de um polinômio p_n tal que o valor da seguinte integral seja mínimo:

$$I(a_0, a_1, \ldots, a_n) = \int_0^1 \left[f(t) - p_n(t)\right]^2 dt. \tag{6}$$

Para determinar o sistema, faça $\partial I/\partial a_i = 0$, para todo $i = 0, 1, \ldots, n$.