Lista 6 - Auto-valores e Auto-vetores

Exercício 1. Sejam λ e $\mathbf{x}$ um auto-par de uma matriz A. Mostre que $\alpha\mathbf{x}$ também é um auto-vetor associado a λ para qualquer escalar α não-nulo. Em particular, pode-se tomar $\alpha = 1/\|\mathbf{x}\|$.

Exercício 2. Mostre que uma matriz A é não-singular se, e somente se, 0 não é um auto-valor de A.

Exercício 3. Seja A uma matriz não-singular e λ um auto-valor de A associado ao auto-vetor $\mathbf{x}$. Mostre que $\mathbf{x}$ é também um auto-vetor de A^{-1} associado ao auto-valor $1/\lambda$.

Exercício 4. Mostre que, se λ e $\mathbf{x}$ foram um auto-par de A e μ é um escalar, então $\lambda - \mu$ e $\mathbf{x}$ é um auto-par de $A - \mu I$.

Exercício 5 (Quociente de Rayleigh)**.** Seja $A \in C^{n\times n}$ e $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Mostre que

$$\mu = \frac{\mathbf{v}^* A\mathbf{v}}{\mathbf{v}^*\mathbf{v}}, \tag{1}$$

chamado *quociente de Rayleigh de* $\mathbf{v}$, minimiza a função $f : \mathbb{C} \to [0, +\infty)$ dada por $f(z) = \|A\mathbf{v} - z\mathbf{v}\|_2$. Qual o valor de μ se $\mathbf{v}$ for um auto-vetor de A?

Exercício 6. Seja $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e $\mathbf{x}$ um auto-vetor de A associado ao auto-valor λ. Suponha que $\|\mathbf{x}\|_2 = 1$. Seja $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ um vetor com $\|\mathbf{v}\|_2 = 1$ e $\mu = \mathbf{v}^* A\mathbf{v}$ o quociente de Rayleigh de $\mathbf{v}$. Mostre que

$$|\lambda - \mu| \leq 2\|A\|_2\|\mathbf{x} - \mathbf{v}\|_2. \tag{2}$$

Exercício 7. Mostre que λ é um auto-valor de A se, e somente se, o conjugado $\bar{\lambda}$ é um auto-valor de A^*. Mostre também que A e A^T possuem os mesmos auto-valores.

Exercício 8. Sejam $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ auto-vetores de A associados a auto-valores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ distintos. Mostre que $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ são linearmente independentes.

Exercício 9 (Teorema de Gerschgorin)**.** Mostre que todos os auto-valores de $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ estão condidos na união dos seguintes discos no plano complexo:

$$\Lambda_i = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \sum_{j\neq i} |a_{ij}| \right\}. \tag{3}$$

Exercício 10. Suponha que $A = X\Lambda X^{-1}$, onde $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ é a matriz com os auto-valores de A. Mostre que, se μ_k é um auto-valor de $A + E$, então existe um auto-valor λ_i de A tal que $|\mu_k - \lambda_i| \leq \|X^{-1}EX\|_\infty$.

Exercício 11. Sejam $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrizes simétricas com auto-valores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ e $\mu_1, \ldots, \mu_n$, respectivamente. Mostre que, para qualquer μ_k, existe λ_i tal que

$$|\lambda_i - \mu_k| \leq \|A - B\|_2. \tag{4}$$

Exercício 12. Determine os auto-valores, o determinante e os valores singulares de um refletor de Householder.

Exercício 13. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Mostre que se $a + ib$ é um auto-valor de A associado ao auto-vetor $\mathbf{u} + i\mathbf{v}$, então $a - ib$ é um auto-valor de $\mathbf{A}$ associado ao auto-vetor $\mathbf{u} - i\mathbf{v}$.

Exercício 14. Mostre que os auto-valores de uma matriz hermitiana são todos reais e os auto-vetores são formam um conjunto ortogonal.

Exercício 15. Mostre que os auto-valores de uma matriz hermitiana definida positiva são todos positivos.

Exercício 16. Seja $A = U\Sigma V^T$ a decomposição SVD de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, com $U = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $V = [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrizes ortogonais e $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ é uma matriz diagonal com $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \sigma_n \geq 0$. Mostre que $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ são auto-vetores de $A^T A$ e $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ são auto-vetores de AA^T associados aos auto-valores $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_n^2$.

Exercício 17. Mostre que, para qualquer norma induzida de matriz, $\rho(A) \leq \|A\|$, onde $\rho(A)$ denota o raio espectral de A.

Exercício 18. Seja $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ e $\|\cdot\|$ uma norma de matrizes. Mostre que $\lim_{n\to\infty} \|A^n\| = 0$ se, e somente se, $\rho(A) < 1$.

Exercício 19. Um polinômio em uma matriz A é uma expressão da forma $p(A) = \alpha_0 + \alpha_1 A + \ldots + \alpha_m A^m$. Mostre que, se λ e $\mathbf{x}$ representam um auto-valor e um auto-vetor associado da matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, então $p(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \ldots + \alpha_m\lambda^m$ é um auto-valor de $p(A)$ associado ao auto-vetor $\mathbf{x}$.

Exercício 20. Sejam $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ com pelo menos uma delas não-singular. Mostre que AB e BA possuem os mesmos auto-valores.

Exercício 21. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz hermitiana. Usando a decomposição de Schur, mostre que existe uma matriz unitária Q tal que $Q^T AQ = D$ é uma matriz diagonal. O que pode ser dito sobre a decomposição SVD de A.

Exercício 22. Uma matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ é dita *normal* se $A^*A = AA^*$. Mostre que, se $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ é normal e triangular superior, então T é diagonal. Mostre também que toda matriz normal é unitariamente diagonalizável, i.e., A pode ser escrita como $A = Q\Lambda Q^*$ onde Λ é uma matriz diagonal e Q é unitária.

Exercício 23. Suponha que $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ possua auto-valores distintos. Mostre que, se $Q^*AQ = T$ é a decomposição de Schur de A e $AB = BA$, então Q^*BQ é triangular superior.

Exercício 24. Dada uma matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, use a decomposição de Schur para mostrar que, para todo $\epsilon > 0$, existe uma matriz diagonalizável B tal que $\|A - B\|_2 \leq \epsilon$. Portanto, o conjunto das matrizes diagonalizáveis é denso em $\mathbb{C}^{n\times n}$.

Exercício 25. Mostre que o traço de uma matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, definido como $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij}$, é também a soma dos auto-valores de A.

Exercício 26. Mostre que, se $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ é uma matriz hermitiana, então PAP^* é também uma matriz hermitiana para qualquer matriz P.

Exercício 27. Mostre que, se H é uma matriz de Hessenberg e U é triangular superior, então o produto UH e HU são ambas matrizes de Hessenberg.

Exercício 28. Seja $\{A_k\}$ a sequência gerada pelo método QR, ou seja, dado A_0, defina $A_{k+1} = R_k Q_k$, onde $Q_k R_k = A_k$ é a fatoração QR de A_k. Mostre que, se A_0 é não singular, então as seguintes equações são válidas para todo $k = 0, 1, \ldots$:

$$A_{k+1} = Q_k^* A_k Q_k \quad \text{e} \quad A_{k+1} = R_k A_k R_k^{-1}. \tag{5}$$

Use a segunda desigualdade e o exercício anterior para concluir que, se A_0 é uma matriz de Hessenberg, então A_k é também de Hessenberg para todo k.

Exercício 29. Seja A_k a sequencia de matrizes gerada pelo método QR. Defina $\hat{Q}_k = Q_0 \dots Q_{k-1}$ e $\hat{R}_k = R_{k-1} \dots R_0$. Mostre por indução que $A_k = \hat{Q}_k \hat{R}_k$ e conclua que a primeira coluna de $\hat{Q}_k$ é um múltiplo de $A^k \mathbf{e}_1$.

Exercício 30. Suponha que $B = X^{-1}AX$ e $B + \delta B = X^{-1}(A + \delta A)X$. Mostre que

$$\frac{1}{\kappa(X)}\|A\| \leq \|B\| \leq \kappa(X)\|A\| \quad \text{e} \quad \frac{1}{\kappa(X)^2}\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \leq \frac{\|\delta B\|}{\|B\|} \leq \kappa(X)^2\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}, \tag{6}$$

onde $\|\cdot\|$ denota uma norma qualquer de matriz e $\kappa(X) = \|X\|\|X^{-1}\|$ é o número de condição de X nessa norma.