Lista 4 - Quadrados Mínimos, Fatoração QR e Decomposição em Valores Singulares

Exercício 1. Considere o sistema sobredeterminado:

$$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}9\\5\end{bmatrix}.$$

a) Determine a solução de quadrado mínimo desse problema.

b) Calcule as decomposições QR (completa) e QR reduzida da matriz dos coeficientes usando o processo de Gram-Schmidt.

Exercício 2. Considere uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$, com $m \geq n$. Mostre que A^*A é não-singular se e somente se A tem posto completo.

Exercício 3. Considere as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}.$$

a) Determine o projetor ortogonal P em $\mathcal{I}m(A)$. Qual é a imagem de P quando aplicado no vetor $\mathbf{x} = [1, 2, 3]^*$?

b) Determine o projetor ortogonal P em $\mathcal{I}m(B)$. Qual é a imagem de P quando aplicado no vetor $\mathbf{x} = [1, 2, 3]^*$?

Exercício 4. Mostre que, se P é uma projeção ortogonal, então $I - 2P$ é uma matriz unitária. Apresente uma interpretação geométrica desse resultado.

Exercício 5. Seja F a matriz $m\times m$ definida da seguinte forma para todo vetor $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_m]^* \in \mathbb{R}^m$:

$$F\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_{m-1}\\x_m\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_m\\x_{m-1}\\\vdots\\x_2\\x_1\end{bmatrix}.$$

A matrix $E \in \mathbb{R}^{m\times m}$ que satisfaz $E\mathbf{x} = (\mathbf{x} + F\mathbf{x})/2$, para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, é uma projeção ortogonal, uma projeção oblíqua, ou não é uma projeção. Justifique sua resposta.

Exercício 6. Seja $P \in \mathbb{R}^{m\times m}$ um projetor qualquer não-nulo. Mostre que $||P||_2 \geq 1$, com igualdade se, e somente se, P é uma projeção ortogonal.

Exercício 7. Seja $A = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m]$ uma matriz $m \times m$ (cada $\mathbf{a}_j$ representa uma coluna de A). Demonstre a *desigualdade de Hadamard*:

$$|\det A| \leq \prod_{j=1}^{m} ||\mathbf{a}_j||_2.$$

Apresente uma interpretação geométrica desse resultado. Lembre-se que o valor absoluto do determinante fornece o volume do paralelepipedo definido pelas colunas de A.

Exercício 8. Dados vetores não-nulos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ em $\mathbb{R}^n$, determine a reflexão de Householder H tal que $H\mathbf{x}$ é um múltiplo de $\mathbf{y}$.

Exercício 9. Use reflexões de Householder para mostrar que $\det(I+\mathbf{x}\mathbf{y}^T) = 1+\mathbf{x}^T\mathbf{y}$ para quaisquer $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

Exercício 10. Considere vetores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Mostre que se $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é uma matriz ortogonal tal que

$$Q^T\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Q^T\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \beta \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}, \tag{1}$$

então $\mathbf{u}^T\mathbf{v} = \mathbf{x}^T\mathbf{y} - \alpha\beta$.

Exercício 11. Determine $c = \cos\theta$ e $s = \sin\theta$ tais que

$$\begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Exercício 12. Apresente uma forma geral para rotações e reflexões no plano. Dada uma matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, determine a rotação G e a reflexão H mais próximas de A. Sobre quais condições a rotação de G é mais próxima de A do que a reflexão H.

Exercício 13. Seja $A = U\Sigma V^T$ a decomposição SVD de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Mostre que, se existe $r \leq p$ tal que

$$\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \ldots = \sigma_p = 0\,, \tag{2}$$

então

$$posto(A) = r\,, \tag{3}$$

$$\mathcal{N}(A) = span\{\mathbf{v}_{r+1}, \ldots, \mathbf{v}_n\}\,, \tag{4}$$

$$\mathcal{I}(A) = span\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_r\}\,, \tag{5}$$

onde $\mathcal{N}(A)$ e $\mathcal{I}(A)$ denotam o núcleo e a imagem de A, respectivamente.

Exercício 14. Seja $A = U\Sigma V^T$ a decomposição SVD de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ não singular. Mostre que $A^{-1} = U\Sigma^{-1}V^T$ e $\|A^{-1}\|_2 = s_{min}^{-1}$, onde s_{min} denota o menor valor singular de A.

Exercício 15. Prove que σ_{max}, o maior valor singular de uma matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, satisfaz a seguinte equação:

$$\sigma_{max} = \max\left\{ \frac{\mathbf{y}^T A\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2\|\mathbf{y}\|_2} : \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \;\text{ e }\; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \right\}. \tag{6}$$

Exercício 16. Mostre que se $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tem posto n, então $\|A(A^TA)^1A^T\|_2 = 1$.

Exercício 17. Mostre que $\|A\|_F \leq \sqrt{posto(A)}\|A\|_2$ para toda matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Exercício 18. Seja $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ uma matriz de posto r. Mostre que $\|A\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_r^2}$, onde $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ representam os r valores singulares não-nulos de A.

Exercício 19. Mostre que toda matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ é o limite de uma sequência de matrizes $A_n \in \mathbb{R}^{m\times n}$ de posto completo. Portanto, o conjunto das matrizes de posto completo é denso em $\mathbb{R}^{m\times n}$. Use a norma-2 em sua demonstração, embora, todas as normas em espaço vetorial de dimensão finita sejam equivalentes.

Exercício 20. Seja $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $\|P^TP - I\|_2 = \varepsilon < 1$ e $P = U\Sigma V^T$ a decomposição SVD de P. Mostre que $\|P - UV^T\|_2 \leq \varepsilon$ e que todos os valores singulares de P estão no invervalo $[1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$, i.e., $|1 - \sigma_i| \leq \varepsilon$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

Exercício 21. Seja $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, com $posto(A) = n < m$, e $b \in \mathbb{R}^m$. Suponha que $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$, $(A^T A + F)\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}$, e $2\|F\|_2 \leq \sigma_n^2$, onde σ_n denota o n-ésimo valor singular de A. Mostre que, se $\mathbf{r} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}$ e $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}$, então $\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}} = A(A^T A + F)^{-1}Fx$ e

$$\|\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}\|_2 \leq 2\kappa_2(A)\frac{\|F\|_2}{\|A\|_2}\|\mathbf{x}\|_2.$$

Exercício 22. A pseudo-inversa de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ é definida como segue onde $A = U\Sigma V^T$ representa de decomposição SVD de A:

$$A^\dagger = V\Sigma^\dagger U^T, \qquad \Sigma = diag\left(\frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2}, \ldots, \frac{1}{\sigma_r}, 0, \ldots, 0\right), \quad r = posto(A).$$

Mostre que $A^\dagger$ é a única solução do problema

$$\min_{X\in\mathbb{R}^{m\times n}} \|AX - I\|_F,$$

onde I_m denota a matriz identidade. Mostre também que a pseudo-inversa é a única matriz que satisfaz as quatro condições de *Moore-Penrose*:

$$\text{i) } AXA = A, \qquad \text{iii) } (AX)^T = AX, \tag{7}$$

$$\text{ii) } XAX = X, \qquad \text{iii) } (XA)^T = XA. \tag{8}$$