Lista 3 - Eliminação de Gauss e Variações

Exercício 1. Suponha que, para cada linha de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, a soma dos seus elementos é zero. Mostre que A é singular.

Exercício 2. Mostre que, se $A^2 = 0$, então A é singular.

Exercício 3. Considere uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ qualquer e matrizes $B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ não-singulares. Dado um vetor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, expresse $\mathbf{x} = B^{-1}(2A+I)(C^{-1}+A)\mathbf{b}$ sem o uso das matrizes inversas B^{-1} e C^{-1}.

Exercício 4. Dados $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, mostre que a matriz $A = \mathbf{u}\mathbf{v}^T$ tem posto 1. Mostre também que a reciproca é verdadeira, i.e., se A tem posto 1, então existem vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tais que $A = \mathbf{u}\mathbf{v}^T$.

Exercício 5. Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é uma *matriz elementar* se A difere da identidade por uma matriz de posto 1, i.e., se $A = I - \mathbf{u}\mathbf{v}^T$, para vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Mostre que, se A é uma matriz elementar não-singular, então A^{-1} é também uma matriz elementar. Para tanto, mostre que $A^{-1} = I - \sigma\mathbf{u}\mathbf{v}^T$ para algum $\sigma \in \mathbb{R}$. Expresse σ em termos dos vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ e determine que condições devemos impor sobre $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ para que A seja não-singular.

Exercício 6. Mostre que a seguinte equação, conhecida como *fórmula de Sherman-Morrison*, é válida se $A - \mathbf{u}\mathbf{v}^T$ é uma matriz não-singular:

$$(A - \mathbf{u}\mathbf{v}^T)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}\mathbf{u}(1 - \mathbf{v}^T A^{-1}\mathbf{u})^{-1}\mathbf{v}^T A^{-1}.$$

Explique como a fórmula de Sherman-Morrison pode ser usada para resolver o sistema linear $(A - \mathbf{u}\mathbf{v}^T)\mathbf{x} = \mathbf{b}$ supondo que a fatoração LU da matriz A é conhecida.

Exercício 7. Mostre que as seguintes afirmações são verdadeiras:

a) A inversa de uma matriz triangular superior (inferior) é uma matriz triangular superior (inferior).

b) O produto de duas matrizes triagular superior (inferior) é uma matriz triangular superior (inferior).

c) A inversa de uma matriz triangular superior (inferior) com diagonal unitária é uma matriz triangular superior (inferior) com diagonal unitária.

d) O produto de duas matrizes triangular superior (inferior) com diagonal unitária é uma matriz triangular superior (inferior) com diagonal unitária.

Exercício 8. Mostre que uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ admite uma fatoração LU se $\det(A_k) \neq 0$, para $k = 1, \ldots, n$, onde $A_k \in \mathbb{R}^{k\times k}$ corresponde ao bloco superior esquerdo da matriz A, i.e.,

$$A_k = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk} \end{bmatrix}.$$

Mostre também que, se a fatoração LU existe e A é não-singular, então a fatoração LU é única e $\det(A) = u_{11}u_{22}\ldots u_{nn}$, onde u_{ii} são os elementos da diagonal da matriz triangular superior U.

Exercício 9. Determine o número de condição $\kappa_\infty(A)$, com respeito a norma $\|\cdot\|_\infty$, da matriz $A = I + \alpha \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_n^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$ é um escalar grande e, $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_n$ representam o primeiro e o n-ésimo vetor da base canônica, respectivamente.

Exercício 10. Dada uma matriz arbritária A, mostre que se $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, então $\mathbf{y}^T A\mathbf{z} + \mathbf{z}^T A\mathbf{y} = 0$ para todo $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$.

Exercício 11. Seja $A' \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz definida positiva particionada da seguinte forma:

$$A' = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix},$$

onde $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ e as matrizes B e C possuem dimensões apropriadas. Mostre que a matriz $C - B^T A^{-1} B$ é uma matriz definida positiva.
Dica: Para um vetor $\mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^{n-m}$ fixo, determine $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^m$ tal que $\mathbf{x}^T A'\mathbf{x} = \mathbf{x}_2^T (C - B^T A^{-1} B)\mathbf{x}_2$, onde $\mathbf{x}^T = [\mathbf{x}_1^T, \mathbf{x}_2^T]$.