Lista 2 - Análise Matricial

Exercício 1. Mostre que uma matriz A triangular é não-singular se e somente se $a_{ii} \neq 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

Exercício 2. Mostre que as seguintes desigualdades são válidas para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2 \leq n\|\mathbf{x}\|_\infty,$$

$$\|A\|_1 \leq \sqrt{n}\|A\|_2 \leq n\|A\|_1,$$
$$\|A\|_\infty \leq \sqrt{n}\|A\|_2 \leq n\|A\|_\infty.$$

Exercício 3. Mostre que, se $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, então existe um vetor $\mathbf{z}$ unitário na norma-2 (i.e., $\|\mathbf{z}\|_2 = 1$) tal que $A^T A\mathbf{z} = \mu^2\mathbf{z}$, onde $\mu = \|A\|_2$.

Exercício 4. Use o exercício anterior para mostrar que se $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, então $\|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_1\|A\|_\infty}$.

Exercício 5. Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz tal que $\|A\|_p < 1$. Mostre que $I - A$ é uma matriz não-singular e

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k,$$

com

$$\|(I - A)^{-1}\|_p \leq \frac{1}{1 - \|A\|_p}.$$

Exercício 6. Suponha $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ e $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Mostre que, se $E = \mathbf{u}\mathbf{v}^T$ então $\|E\|_F = \|E\|_2 = \|\mathbf{u}\|_2\|\mathbf{v}\|_2$ e que $\|E\|_\infty \leq \|\mathbf{u}\|_\infty\|\mathbf{v}\|_1$.

Exercício 7. Suponha que desejamos calcular a potência A^n de uma matriz quadrada A, onde n é um inteiro positivo. Observe que calcular $A^{k+1} = A \cdot A^k$, para $k = 1, 2, \ldots, n-1$ requer $n-1$ multiplicações de matrizes. Mostre que o número de multiplicações pode ser reduzido para menos de $2\lfloor \log_2 n \rfloor$ convertendo n para a forma binária e calculando os quadrados $A^{2k} = (A^k)^2$, para $k = 1, 2, \ldots, \lfloor \log_2 n \rfloor$. Aqui, $\lfloor x \rfloor$ denota o maior inteiro menor ou igual a x.

Definição 1 (Matriz Ortogonal). *Uma matrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é dita ortogonal se $Q^T Q = QQ^T = I$, onde I é a matriz identidade $n \times n$. Em outras palavras, o conjunto $\{\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n\}$, formado pelas n colunas de Q, é ortonormal.*

Exercício 8. Mostre que se A é uma matriz triangular ortogonal, então A é uma matriz diagonal.

Definição 2 (Autovetor e Autovalor). *Um autovetor de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é um vetor não-nulo $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ tal que $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ para algum $\lambda \in \mathbb{C}$, chamado o autovalor correspondente a $\mathbf{x}$. Note que, embora A seja uma matriz sobre o corpo dos números reais, seus autovalores e autovetores podem assumir valores no corpo dos números complexos.*

Exercício 9. Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz simétrica, i.e. $A = A^T$.

a) Mostre que todos os autovalores de A são reais;

b) Prove que, se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são autovetores que correspondem a autovalores distintos, então $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são ortogonais.

Exercício 10. Seja $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz anti-simétrica, i.e., $S^T = -S$.

a) Mostre que os elementos da diagonal de S são todos nulos;

b) Mostre que os autovalores de S são imaginários puros;

c) Mostre que $I - S$ é não-singular;

d) Mostre que a matrix $Q = (I - S)^{-1}(I + S)$, chamada *transformação de Cayley de* S, é ortogonal.

Exercício 11. Se $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, então a matriz $A = I + \mathbf{u}\mathbf{v}^*$ é chamada *perturbação de posto-um da identidade*. Mostre que se A é não singular, então sua inversa tem a forma $A^{-1} = I + \alpha\mathbf{u}\mathbf{v}^*$ para algum escalar α e encontre uma expressão para α. Determine os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ para os quais a matriz A é singular. Determine o núcleo de A quando A for singular.

Exercício 12. Mostre que, se $\mathbf{0} \neq \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$ e $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$, então

$$\left\| E\left(I - \frac{\mathbf{s}\mathbf{s}^T}{\mathbf{s}^T\mathbf{s}}\right)\right\|_F^2 = \|E\|_F^2 - \frac{\|E\mathbf{s}\|_2^2}{\mathbf{s}^T\mathbf{s}}.$$