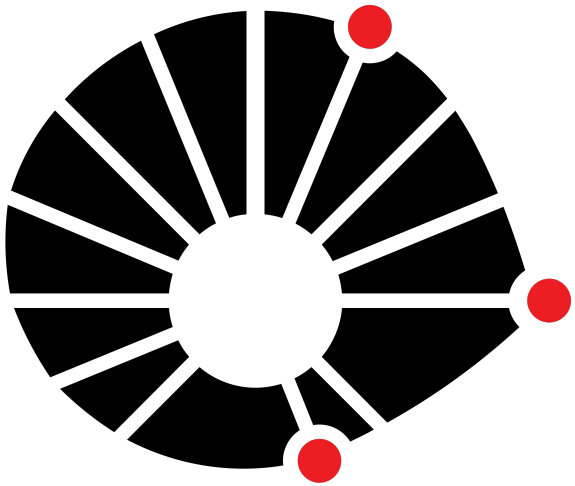
O problema da irregularidade na morfologia matemática multivalorada

Cliclo de Palestras em Matemática Aplicada 2020-2021



UNICAMP

Marcos Eduardo Valle

29 de Julho de 2021

Introdução

A **morfologia matemática** (MM) é um conjunto de ferramentas matemáticas utilizada para **análise** e **processamento** de imagens.

Introdução

A **morfologia matemática** (MM) é um conjunto de ferramentas matemáticas utilizada para **análise** e **processamento** de imagens.

A palavra **morfologia** tem suas origens no estudo das formas.

Introdução

A **morfologia matemática** (MM) é um conjunto de ferramentas matemáticas utilizada para **análise** e **processamento** de imagens.

A palavra **morfologia** tem suas origens no estudo das formas.

A MM usa conceitos **geométricos** e **topológicos** para o tratamento de imagens (Heijmans, 1994; Serra, 1982; Soille, 1999).

Introdução

A **morfologia matemática** (MM) é um conjunto de ferramentas matemáticas utilizada para **análise** e **processamento** de imagens.

A palavra **morfologia** tem suas origens no estudo das formas.

A MM usa conceitos **geométricos** e **topológicos** para o tratamento de imagens (Heijmans, 1994; Serra, 1982; Soille, 1999).

A MM foi desenvolvida inicialmente por Georges Matheron e Jean Serra nos anos 60s para a análise de imagens binárias (preto e branco).

Introdução

A **morfologia matemática** (MM) é um conjunto de ferramentas matemáticas utilizada para **análise** e **processamento** de imagens.

A palavra **morfologia** tem suas origens no estudo das formas.

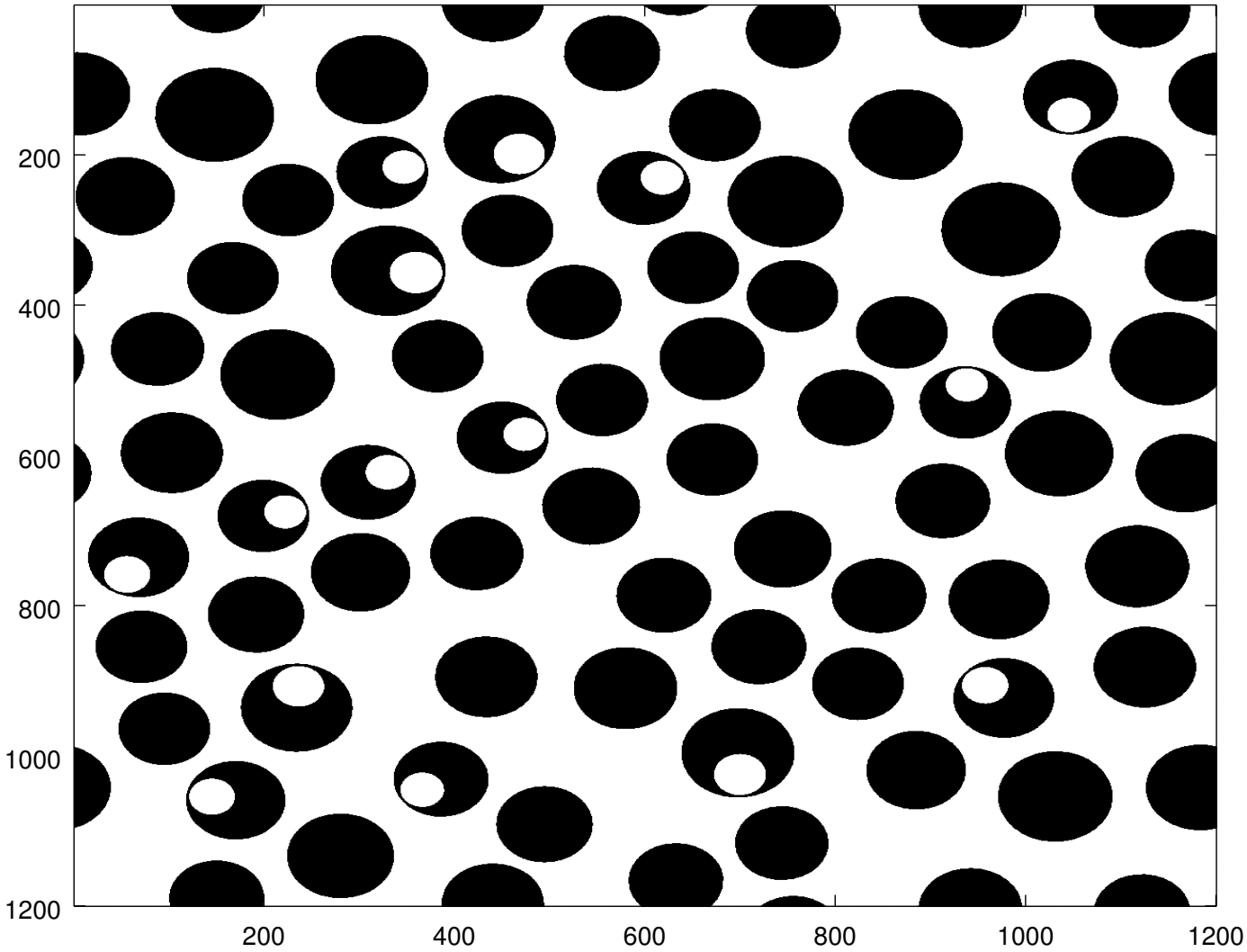
A MM usa conceitos **geométricos** e **topológicos** para o tratamento de imagens (Heijmans, 1994; Serra, 1982; Soille, 1999).

A MM foi desenvolvida inicialmente por Georges Matheron e Jean Serra nos anos 60s para a análise de imagens binárias (preto e branco).

Uma imagem binária A pode ser vista como um subconjunto de um domínio D, em que $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ou $D \subseteq \mathbb{Z}^2$.

Exemplo de Imagem Binária

Imagem binária de tamanho 1200×1200.



Operadores Elementares da MM

Os dois operadores elementares da morfologia matemática são a dilatação e a erosão.

Operadores Elementares da MM

Os dois operadores elementares da morfologia matemática são a dilatação e a erosão.

A dilatação e a erosão extraem informações geométricas usando um **elemento estruturante (SE)** S, em que $S \subseteq \mathbb{Z}^2$ ou $S \subseteq \mathbb{R}^2$, tal como o domínio da imagem D.

Erosão

A erosão de uma imagem binária A por S é o conjunto de todos os pontos nos quais S “cabe” em A.

Erosão

A erosão de uma imagem binária A por S é o conjunto de todos os pontos nos quais S "cabe" em A.

Formalmente, a erosão de A por S é

$$\varepsilon_S(A) = \{x : S_x \subseteq A\},$$

em que

$$S_x = \{s + x : s \in S\},$$

denota a translação de S por x.

Erosão

A erosão de uma imagem binária A por S é o conjunto de todos os pontos nos quais S "cabe" em A.

Formalmente, a erosão de A por S é

$$\varepsilon_S(A) = \{x : S_x \subseteq A\},$$

em que

$$S_x = \{s + x : s \in S\},$$

denota a translação de S por x.

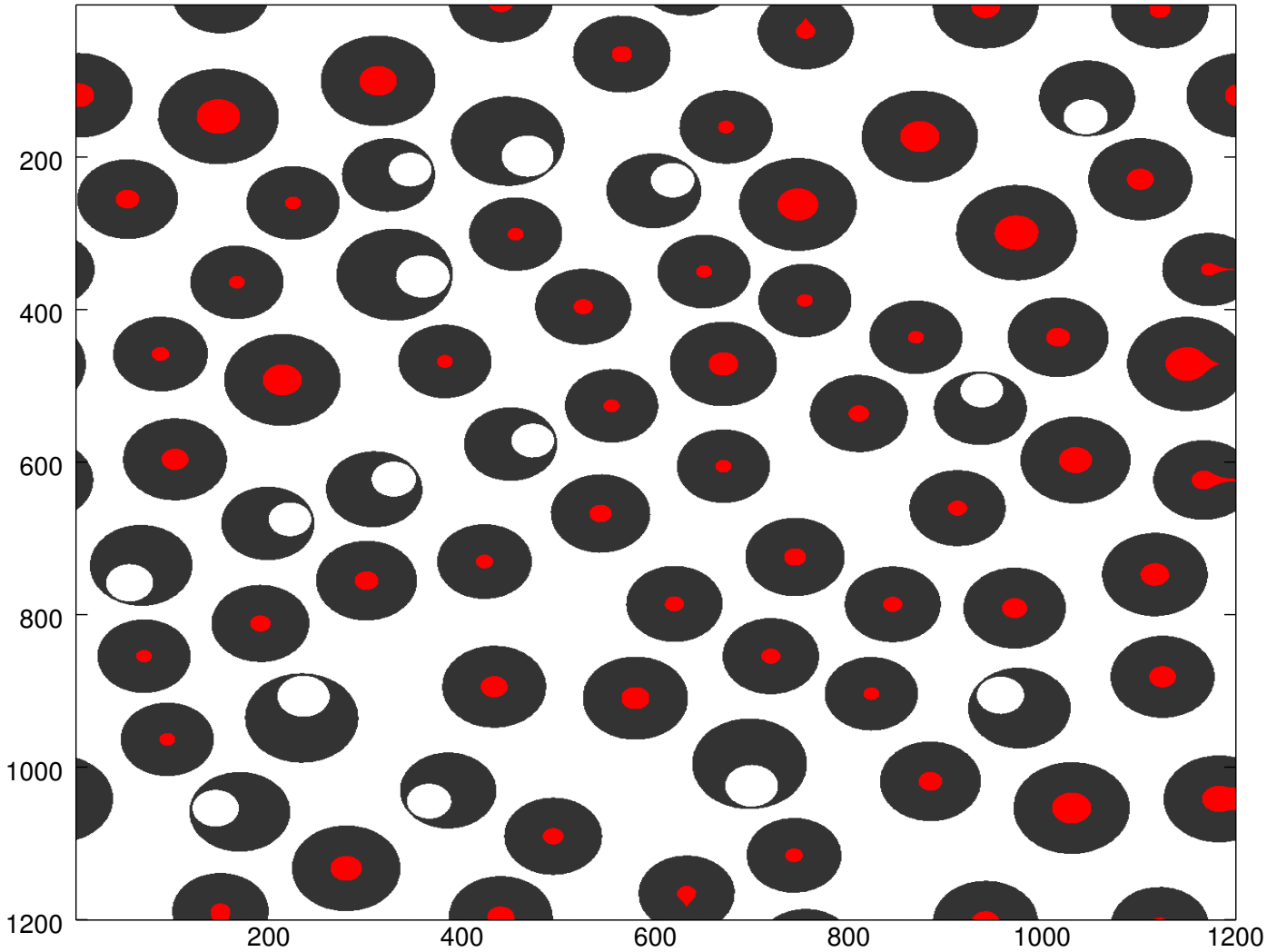
Usando a teoria dos conjuntos, podemos mostrar que:

$$\varepsilon_S(A) = \bigcap_{s \in S} A_{-s}.$$

Logo, a erosão corresponde a intersecção de translações da imagem A.

Exemplo – Erosão

Erosão (vermelho) da imagem binária (preto) pela bola: ●



Dilatação

A dilatação é o conjunto de todos os pontos nos quais o elemento estruturante S “acerta” a imagem binária A.

Dilatação

A dilatação é o conjunto de todos os pontos nos quais o elemento estruturante S “acerta” a imagem binária A.

Em termos matemáticos, a dilatação de A por S é

$$\delta_S(A) = \{x : S_x \cap A \neq \emptyset\}.$$

Dilatação

A dilatação é o conjunto de todos os pontos nos quais o elemento estruturante S “acerta” a imagem binária A.

Em termos matemáticos, a dilatação de A por S é

$$\delta_S(A) = \{x : S_x \cap A \neq \emptyset\}.$$

Equivalentemente, a dilatação corresponde à união de translações da imagem A:

$$\delta_S(A) = \bigcup_{s \in S} A_{-s}.$$

Dilatação

A dilatação é o conjunto de todos os pontos nos quais o elemento estruturante S "acerta" a imagem binária A.

Em termos matemáticos, a dilatação de A por S é

$$\delta_S(A) = \{x : S_x \cap A \neq \emptyset\}.$$

Equivalentemente, a dilatação corresponde à união de translações da imagem A:

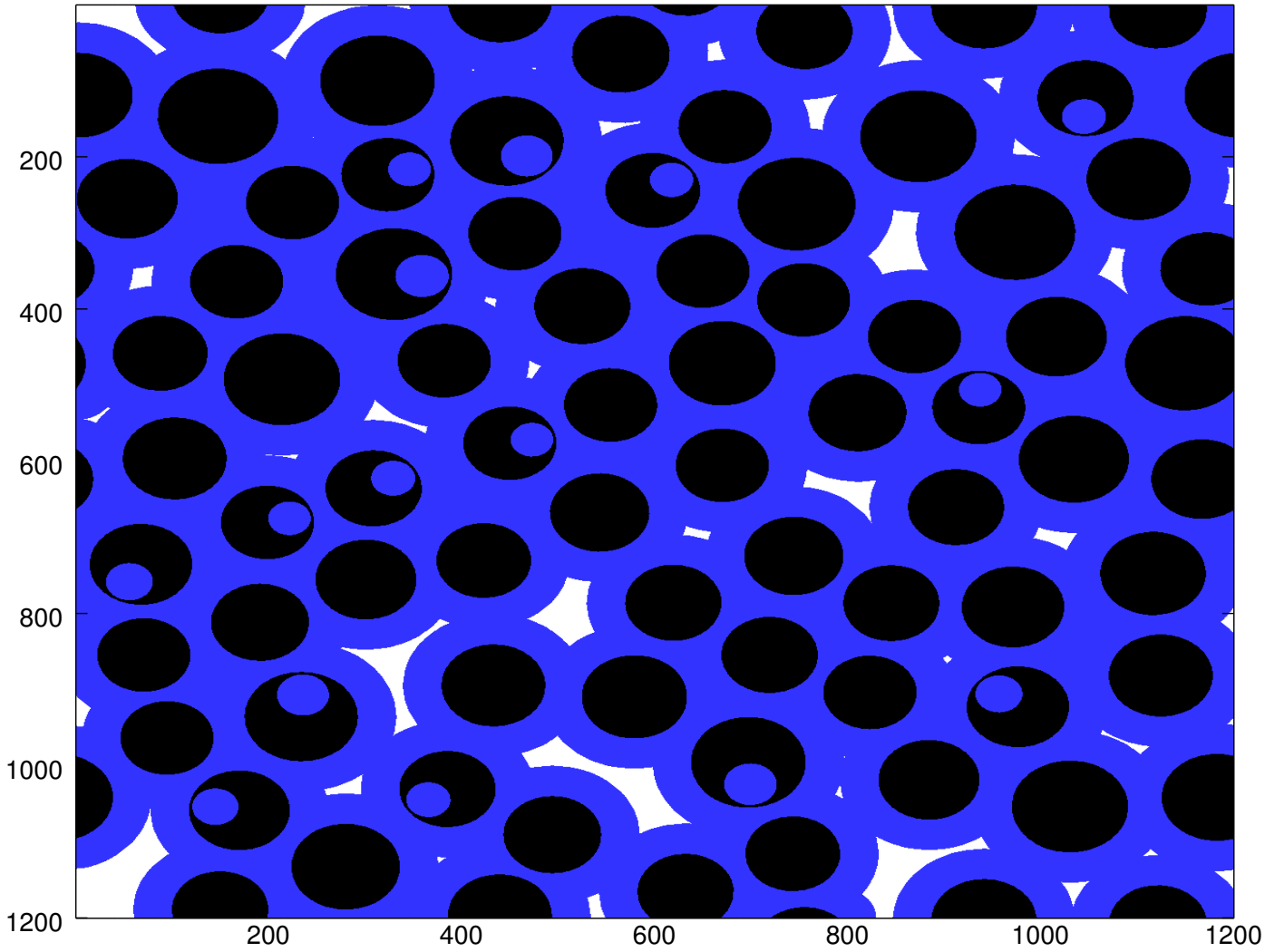
$$\delta_S(A) = \bigcup_{s \in S} A_{-s}.$$

A dilatação é também obtida "carimbando" o elemento estruturante refletido:

$$\delta_S(A) = \bigcup_{a \in A} \check{S}_a, \quad \text{em que} \quad \check{S} = \{-s : s \in S\}.$$

Exemplo – Dilatação

Dilatação (azul) da imagem binária (preto) pela bola:



Dualidade: Complemento e Adjunção

Usando a leis de De Morgan, concluímos que a erosão e a dilatação são **duais com respeito ao complemento**:

$$\delta_S(A) = [\varepsilon_S(A^c)]^c .$$

Dualidade: Complemento e Adjunção

Usando a leis de De Morgan, concluímos que a erosão e a dilatação são **duais com respeito ao complemento**:

$$\delta_S(A) = [\varepsilon_S(A^c)]^c .$$

Dilatação e erosão não são operadores inversos, mas formam uma **adjunção**:

$$\delta_{\check{S}}(A) \subseteq B \quad \Longleftrightarrow \quad A \subseteq \varepsilon_S(B).$$

Dualidade: Complemento e Adjunção

Usando a leis de De Morgan, concluímos que a erosão e a dilatação são **duais com respeito ao complemento**:

$$\delta_S(A) = [\varepsilon_S(A^c)]^c .$$

Dilatação e erosão não são operadores inversos, mas formam uma **adjunção**:

$$\delta_{\check{S}}(A) \subseteq B \quad \Longleftrightarrow \quad A \subseteq \varepsilon_S(B).$$

Obs: O conceito de adjunção está relacionado ao conceito de conexão de Galois da álgebra.

Abertura e Fechamento

Outros operadores da morfologia matemática são obtidos combinando dilatações e erosões.

Abertura e Fechamento

Outros operadores da morfologia matemática são obtidos combinando dilatações e erosões.

A **abertura** e o **fechamento** de uma imagem binária A por um elemento estruturante S são

$$\gamma_S(A) = \delta_{\check{S}}\Big(\varepsilon_S(A)\Big) \quad \text{e} \quad \phi_S(A) = \varepsilon_{\check{S}}\Big(\delta_S(A)\Big).$$

Abertura e Fechamento

Outros operadores da morfologia matemática são obtidos combinando dilatações e erosões.

A **abertura** e o **fechamento** de uma imagem binária A por um elemento estruturante S são

$$\gamma_S(A) = \delta_{\check{S}}\Big(\varepsilon_S(A)\Big) \quad \text{e} \quad \phi_S(A) = \varepsilon_{\check{S}}\Big(\delta_S(A)\Big).$$

A abertura pode ser reformulada como

$$\gamma_S(A) = \bigcup\{S_x : S_x \subseteq A\},$$

ou seja, a abertura é obtida "carimbando" o elemento estruturante S quando ele "cabe" na imagem A.

Abertura e Fechamento

Outros operadores da morfologia matemática são obtidos combinando dilatações e erosões.

A **abertura** e o **fechamento** de uma imagem binária A por um elemento estruturante S são

$$\gamma_S(A) = \delta_{\check{S}}\Big(\varepsilon_S(A)\Big) \quad \text{e} \quad \phi_S(A) = \varepsilon_{\check{S}}\Big(\delta_S(A)\Big).$$

A abertura pode ser reformulada como

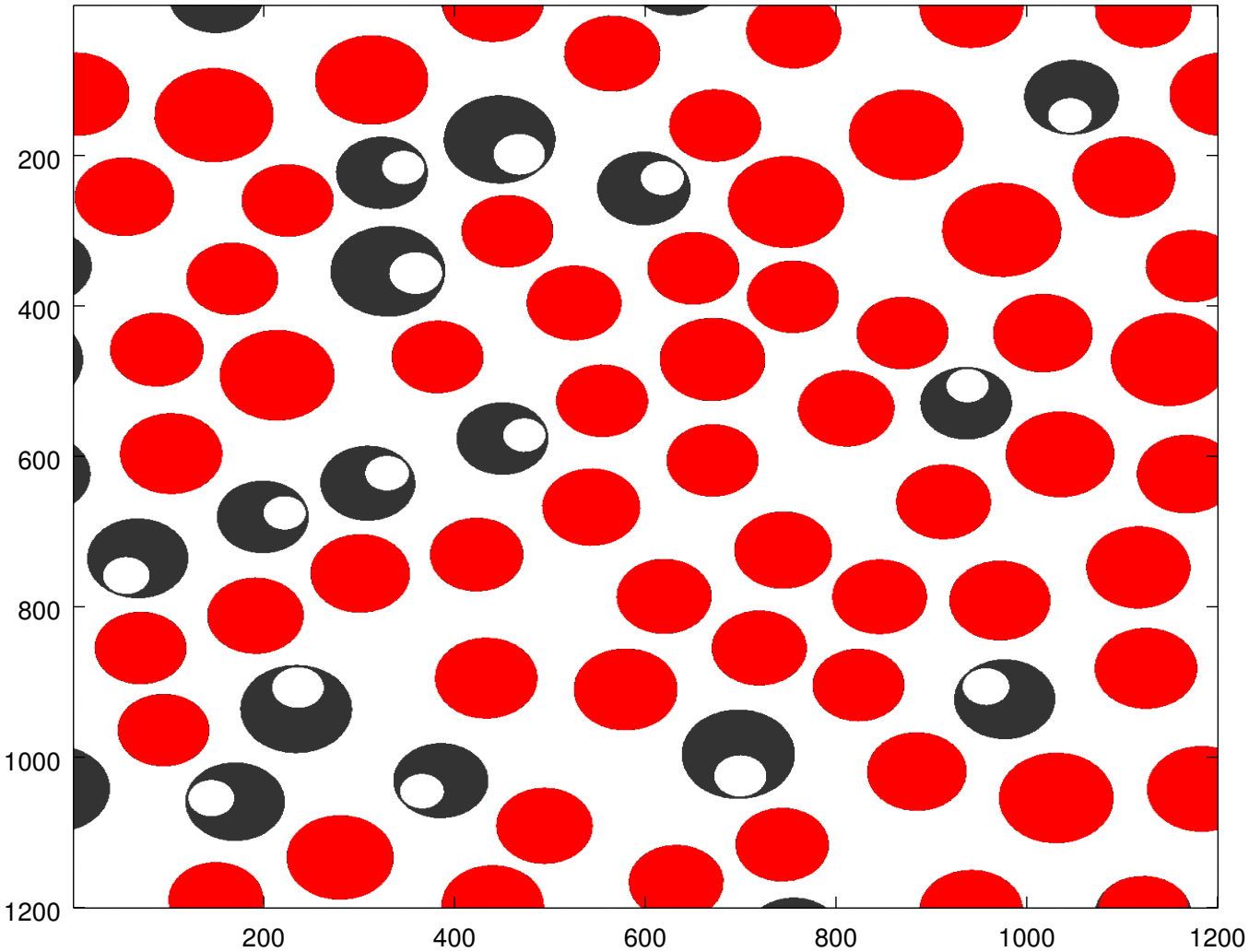
$$\gamma_S(A) = \bigcup\{S_x : S_x \subseteq A\},$$

ou seja, a abertura é obtida "carimbando" o elemento estruturante S quando ele "cabe" na imagem A.

Interpretação semelhante vale para o fechamento.

Exemplo – Abertura

Abertura (vermelho) da imagem binária (preto) pela bola: ●



Abertura e Fechamento

Tal como o fecho e o interior de um conjunto, vistos nos cursos de análise, a abertura e o fechamento são operadores idempotentes, i.e.,

$$\gamma_S\Big(\gamma_S(A)\Big) = \gamma_S(A) \quad \text{e} \quad \phi_S\Big(\phi_S(A)\Big) = \phi_S(A)$$

Abertura e Fechamento

Tal como o fecho e o interior de um conjunto, vistos nos cursos de análise, a abertura e o fechamento são operadores idempotentes, i.e.,

$$\gamma_S\Big(\gamma_S(A)\Big) = \gamma_S(A) \quad \text{e} \quad \phi_S\Big(\phi_S(A)\Big) = \phi_S(A)$$

e satisfazem

$$\gamma_S(A) \subseteq A \subseteq \phi_S(A).$$

Abertura e Fechamento

Tal como o fecho e o interior de um conjunto, vistos nos cursos de análise, a abertura e o fechamento são operadores idempotentes, i.e.,

$$\gamma_S\Big(\gamma_S(A)\Big) = \gamma_S(A) \quad \text{e} \quad \phi_S\Big(\phi_S(A)\Big) = \phi_S(A)$$

e satisfazem

$$\gamma_S(A) \subseteq A \subseteq \phi_S(A).$$

A família dos pontos fixos de γ_S, ou seja,

$$\mathcal{A} = \{A : \gamma_S(A) = A\},$$

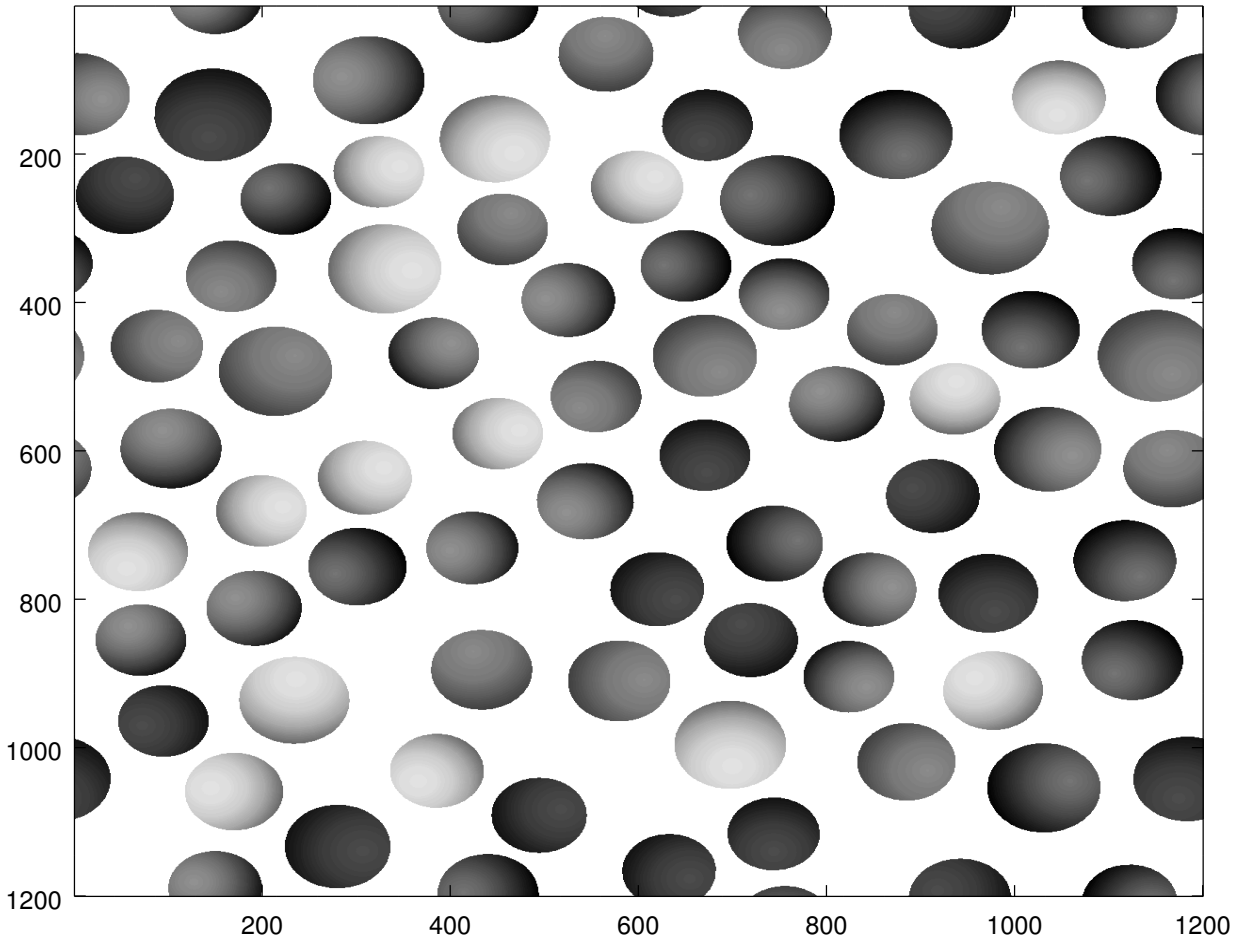
é uma topologia definida pelo elemento estruturante.

Imagens em Tons de Cinza

Uma imagem em tons de cinza é uma função $f : \mathcal{D} \to \mathbb{T}$, em que

- $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{Z}^2$ ou $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ é o domínio da imagem.
- $\mathbb{T} = [0, 1]$ ou $\mathbb{T} = \{0, 1, \ldots, 255\}$ é o conjunto de tons de cinza.

Exemplo:



MM para Imagens em Tons de Ciza

Operadores elementares da MM para imagens em tons de cinza podem ser obtidos fazendo cortes na imagem f.

MM para Imagens em Tons de Ciza

Operadores elementares da MM para imagens em tons de cinza podem ser obtidos fazendo cortes na imagem f.

MM para Imagens em Tons de Ciza

Operadores elementares da MM para imagens em tons de cinza podem ser obtidos fazendo cortes na imagem f.

O **limiar de nível** α de f é o conjunto

$$[f]^{\alpha} = \{x \in \mathcal{D} : f(x) \geq \alpha\}.$$

MM para Imagens em Tons de Ciza

Operadores elementares da MM para imagens em tons de cinza podem ser obtidos fazendo cortes na imagem f.

O **limiar de nível** α de f é o conjunto

$$[f]^{\alpha} = \{x \in \mathcal{D} : f(x) \geq \alpha\}.$$

A imagem f pode ser obtida "empilhando" os limiares de f:

$$f(x) = \sup\{\alpha \in \mathbb{T} : x \in [f]^{\alpha}\}.$$

Dilatação e Erosão em Tons de Cinza

Dado um elemento estruturante S, definimos a erosão e a dilatação de f por S “empilhando” a erosão e dilatação dos limiares de nível:

Dilatação e Erosão em Tons de Cinza

Dado um elemento estruturante S, definimos a erosão e a dilatação de f por S "empilhando" a erosão e dilatação dos limiares de nível:

Definição 1 (Dilatação e Erosão em Tons de Cinza)

$$\varepsilon_S(f)(x) = \sup\{\alpha : x \in \varepsilon_S([f]^\alpha)\},$$

e

$$\delta_S(f)(x) = \sup\{\alpha : x \in \delta_S([f]^\alpha)\}.$$

Dilatação e Erosão em Tons de Cinza

Dado um elemento estruturante S, definimos a erosão e a dilatação de f por S "empilhando" a erosão e dilatação dos limiares de nível:

Definição 1 (Dilatação e Erosão em Tons de Cinza)

$$\varepsilon_S(f)(x) = \sup\{\alpha : x \in \varepsilon_S([f]^\alpha)\},$$

e

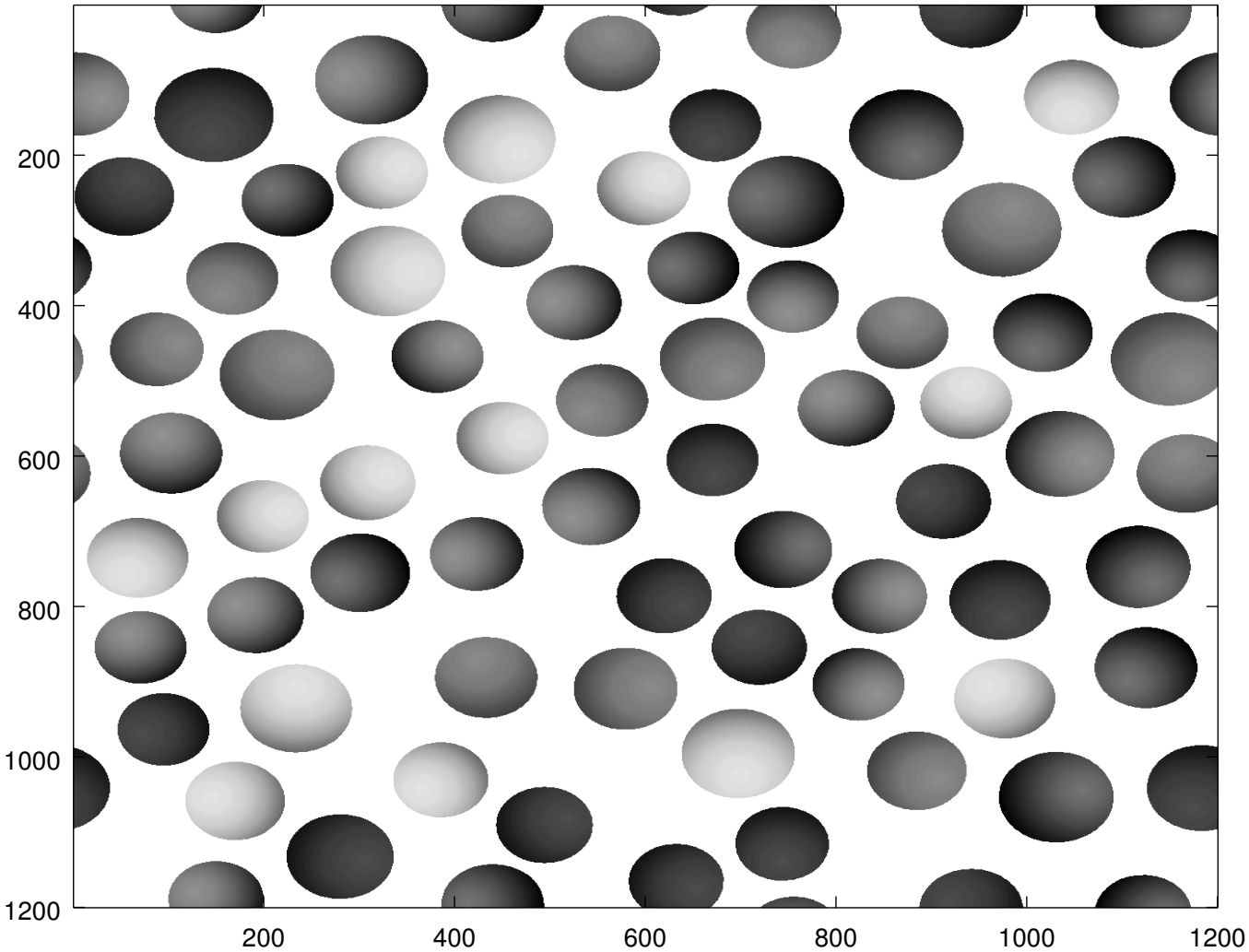
$$\delta_S(f)(x) = \sup\{\alpha : x \in \delta_S([f]^\alpha)\}.$$

Teorema 2

$$\varepsilon_S(f)(x) = \inf_{s \in S}\{f(x+s)\} \quad e \quad \delta_S(f)(x) = \sup_{s \in S}\{f(x+s)\}.$$

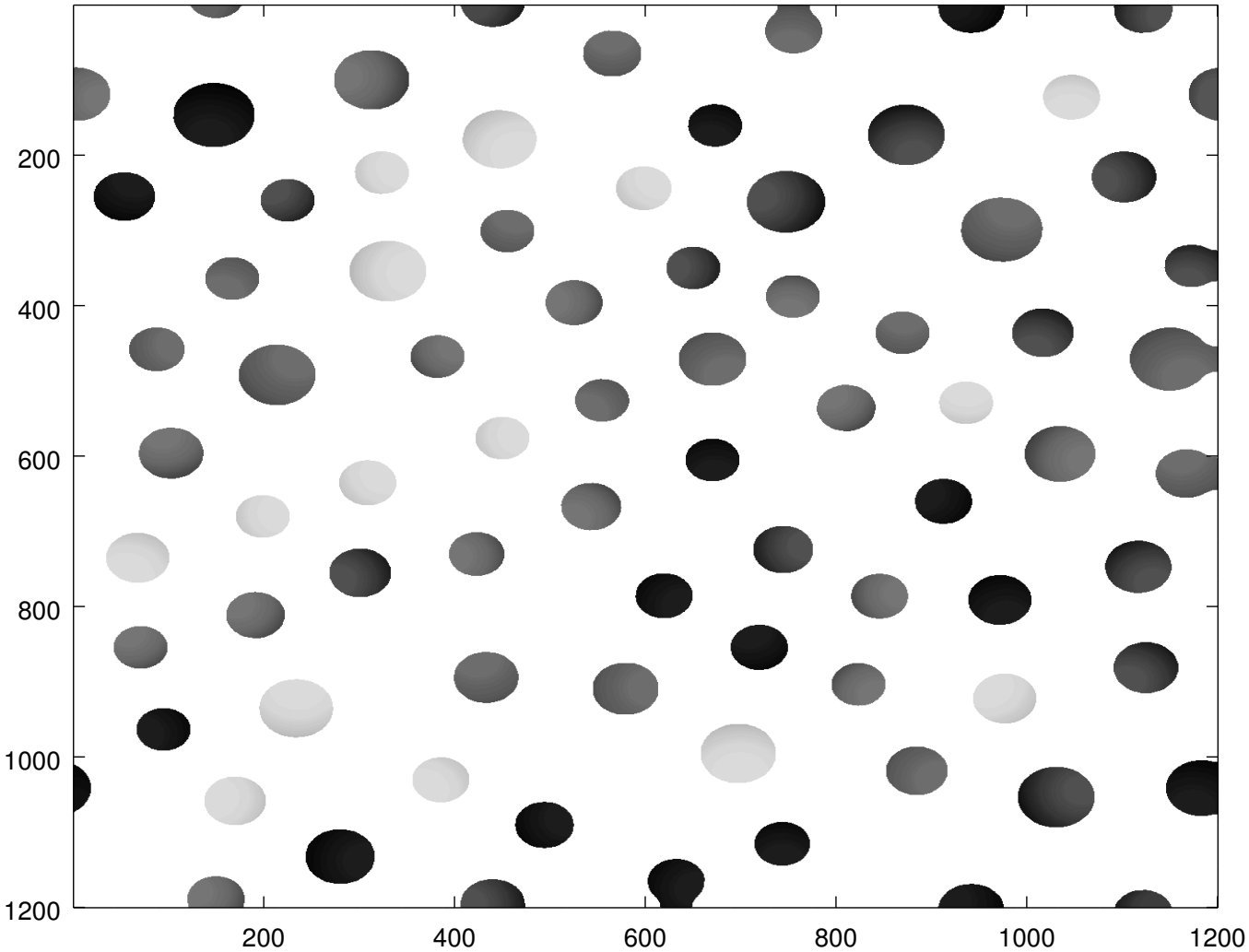
Exemplo – Erosão e Dilatação em Tons de Cinza

Imagem em tons de cinza f:



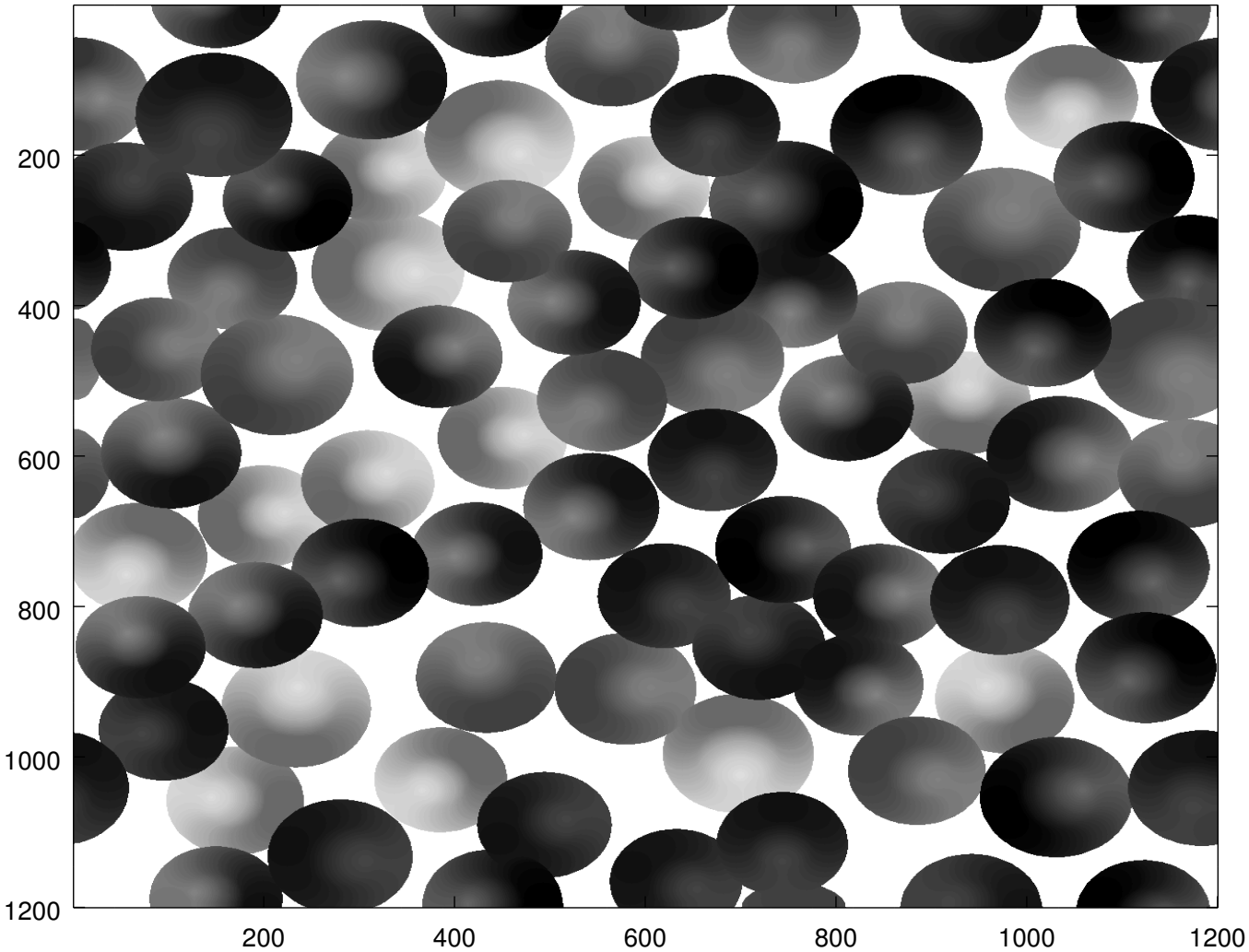
Exemplo – Erosão e Dilatação em Tons de Cinza

Erosão da imagem em tons de cinza pela bola: ●



Exemplo – Erosão e Dilatação em Tons de Cinza

Dilatação da imagem em tons de cinza pela bola: ●



Abertura e Fechamento em Tons de Cinza

Operadores da morfologia matemática em tons de cinza também são obtidos combinando dilatações e erosões.

Abertura e Fechamento em Tons de Cinza

Operadores da morfologia matemática em tons de cinza também são obtidos combinando dilatações e erosões.

A **abertura** e o **fechamento** de uma imagem em tons de cinza f por um elemento estruturante S são

$$\gamma_S(f) = \delta_{\check{S}}\Big(\varepsilon_S(f)\Big) \quad \text{e} \quad \phi_S(f) = \varepsilon_{\check{S}}\Big(\delta_S(f)\Big).$$

Abertura e Fechamento em Tons de Cinza

Operadores da morfologia matemática em tons de cinza também são obtidos combinando dilatações e erosões.

A **abertura** e o **fechamento** de uma imagem em tons de cinza f por um elemento estruturante S são

$$\gamma_S(f) = \delta_{\check{S}}\Big(\varepsilon_S(f)\Big) \quad \text{e} \quad \phi_S(f) = \varepsilon_{\check{S}}\Big(\delta_S(f)\Big).$$

Pode-se mostrar que esses operadores são idempotentes

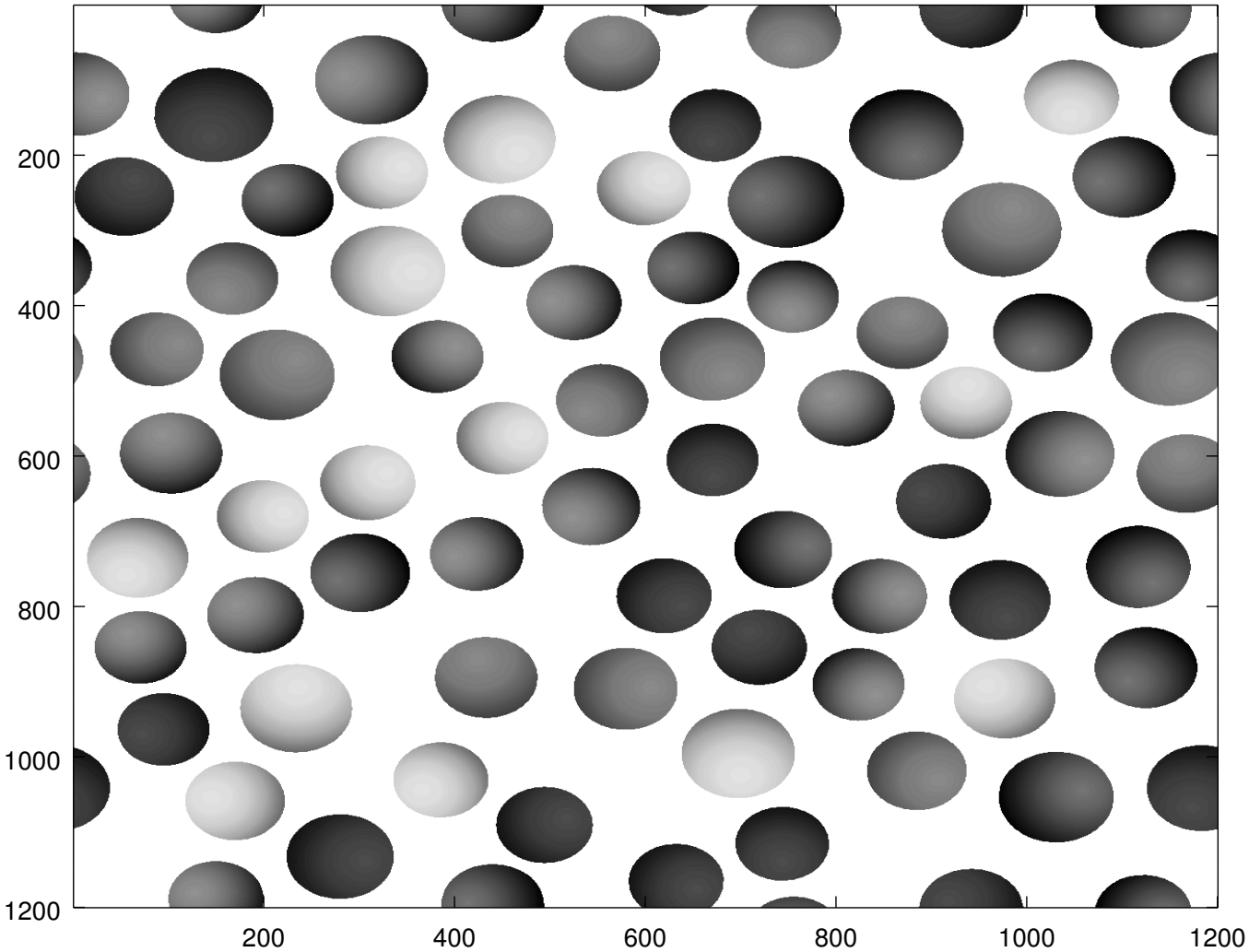
$$\gamma_S\Big(\gamma_S(f)\Big) = \gamma_S(f) \quad \text{e} \quad \phi_S\Big(\phi_S(f)\Big) = \phi_S(f),$$

e satisfazem

$$\gamma_S(f)(x) \subseteq f(x) \subseteq \phi_S(f)(x), \quad \forall x \in \mathcal{D}.$$

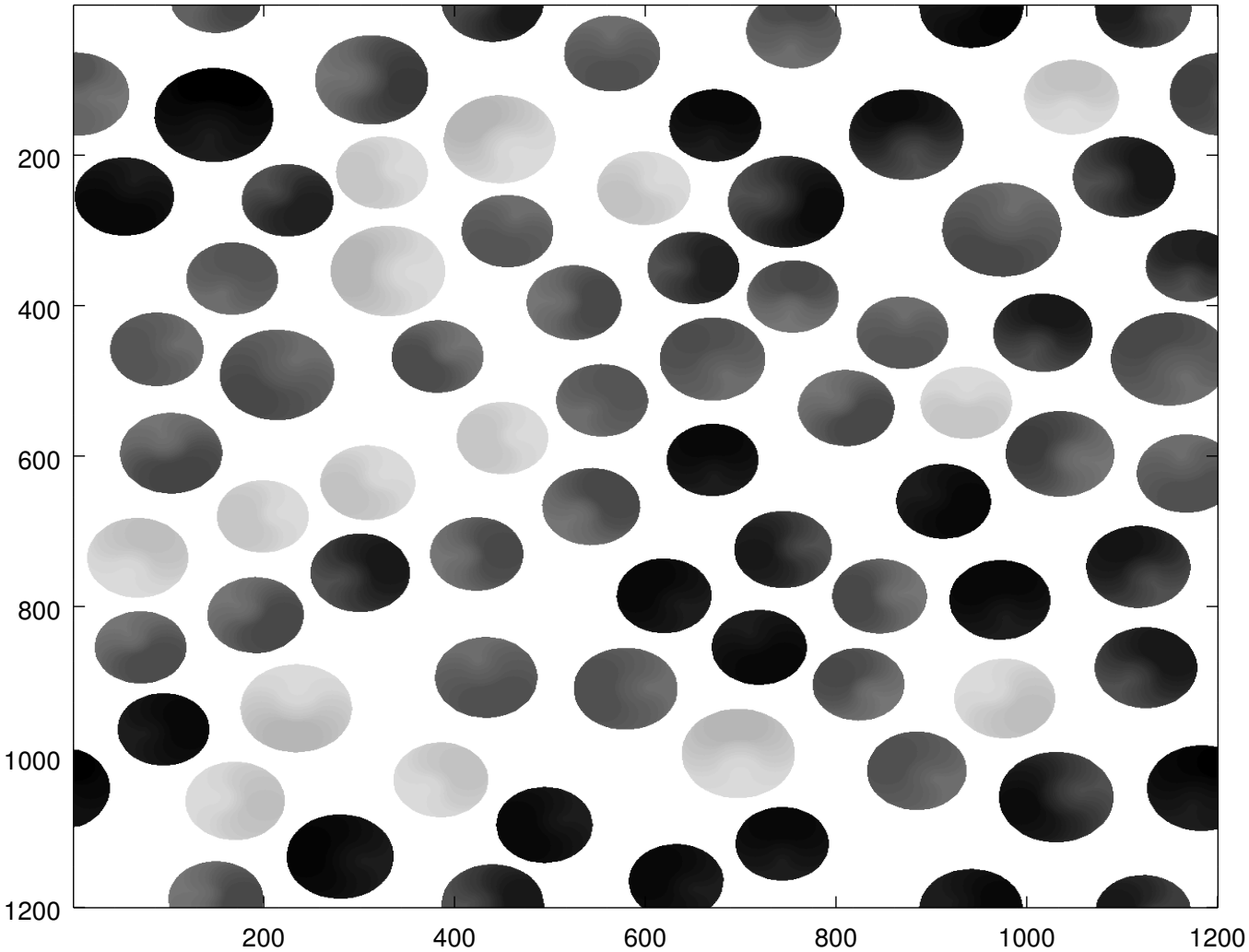
Exemplo – Abertura e Fechamento

Imagem em tons de cinza f:



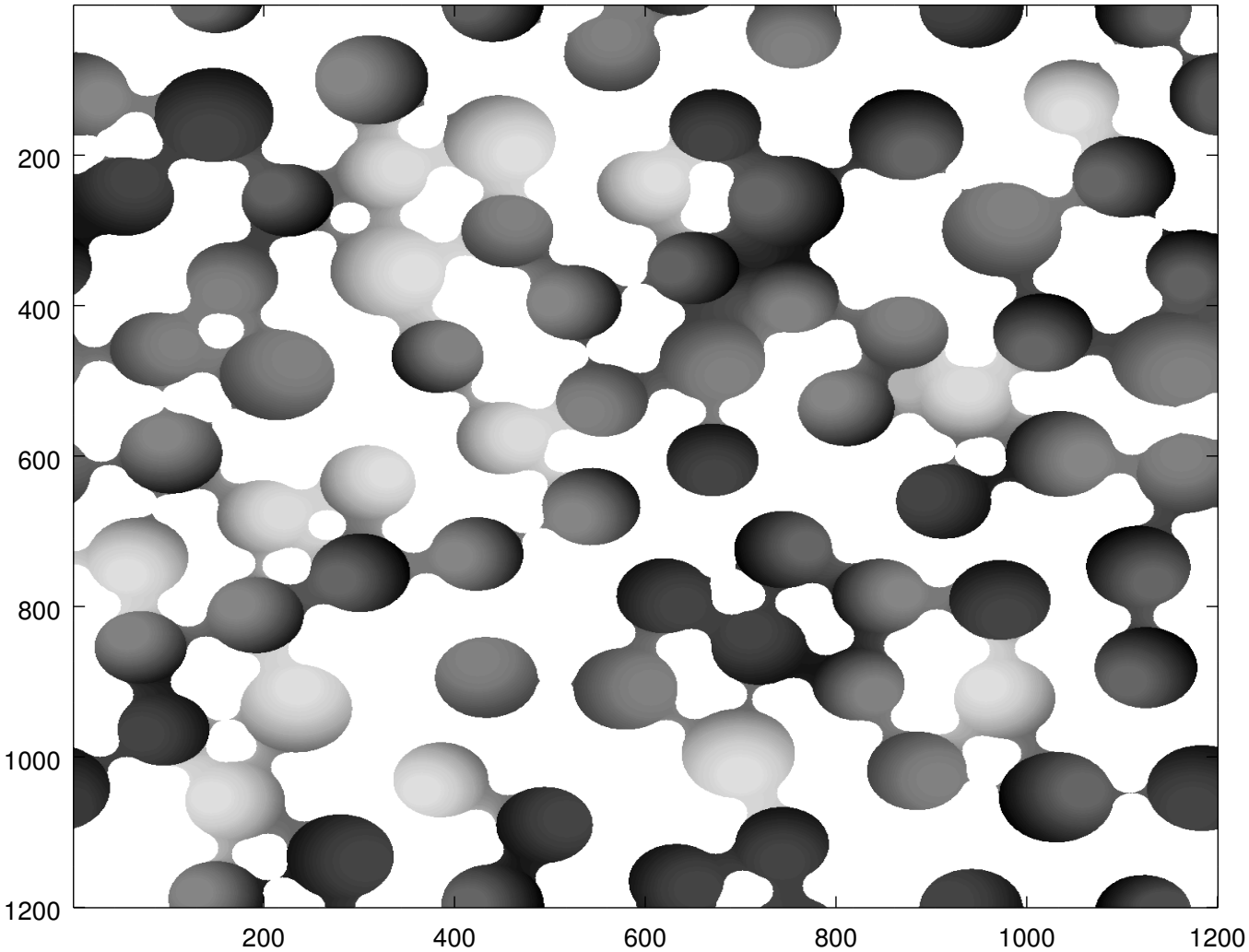
Exemplo – Abertura e Fechamento

Abertura da imagem em tons de cinza pela bola: ●



Exemplo – Abertura e Fechamento

Fechamento da imagem em tons de cinza pela bola: ●



Reticulado Completo

De um modo geral, a MM pode ser muito bem conduzida numa estrutura matemática chamada **reticulado completo** (Birkhoff, 1993; Heijmans, 1995).

Definição 3 (Reticulado Completo)

Um reticulado completo $\mathcal{L}$ é um conjunto parcialmente ordenado em que todo subconjunto (finito ou infinito) possui supremo e ínfimo.

Exemplo 4

Tanto o intervalo $[0, 1]$ como o conjunto discreto $\{0, 1, \ldots, 255\}$ são reticulados completos com a ordem usual. Contudo, o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ não é um reticulado completo!

Morfologia Matemática em Reticulados Completos

Podemos definir os operadores da morfologia matemática em um reticulado completo usando o conceito de adjunção!

Morfologia Matemática em Reticulados Completos

Podemos definir os operadores da morfologia matemática em um reticulado completo usando o conceito de adjunção!

Definição 5 (Adjunção, Erosão e Dilatação)

Seja $\mathcal{L}$ um reticulado completo. Dizemos que dois operadores $\varepsilon : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ e $\delta : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ formam uma adjunção se

$$\delta(x) \leq y \quad \Longleftrightarrow \quad x \leq \varepsilon(y).$$

Nesse caso, ε é uma erosão e δ é uma dilatação.

Além disso, as composições

$$\gamma = \delta \circ \varepsilon \quad \text{e} \quad \phi = \varepsilon \circ \delta,$$

representam uma abertura e um fechamento, respectivamente.

Morfologia Matemática Multivalorada

Uma imagem multivalorada é uma função $f : \mathcal{D} \to \mathbb{V}$, em que

- $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{Z}^2$ ou $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ é o domínio da imagem.
- $\mathbb{V}$, geralmente um subconjunto de $\mathbb{R}^d$, com $d \geq 2$, é o conjunto de valores (vetores!).

Morfologia Matemática Multivalorada

Uma imagem multivalorada é uma função $f : \mathcal{D} \to \mathbb{V}$, em que

- $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{Z}^2$ ou $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ é o domínio da imagem.
- $\mathbb{V}$, geralmente um subconjunto de $\mathbb{R}^d$, com $d \geq 2$, é o conjunto de valores (vetores!).

A morfologia matemática em reticulados completos permite definir operadores para imagens multivaloradas como segue:

$$\varepsilon_S(f)(x) = \inf_{s \in S}\{f(x+s)\} \quad \text{e} \quad \delta_S(f)(x) = \sup_{s \in S}\{f(x+s)\}.$$

Morfologia Matemática Multivalorada

Uma imagem multivalorada é uma função $f : \mathcal{D} \to \mathbb{V}$, em que

- $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{Z}^2$ ou $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ é o domínio da imagem.
- $\mathbb{V}$, geralmente um subconjunto de $\mathbb{R}^d$, com $d \geq 2$, é o conjunto de valores (vetores!).

A morfologia matemática em reticulados completos permite definir operadores para imagens multivaloradas como segue:

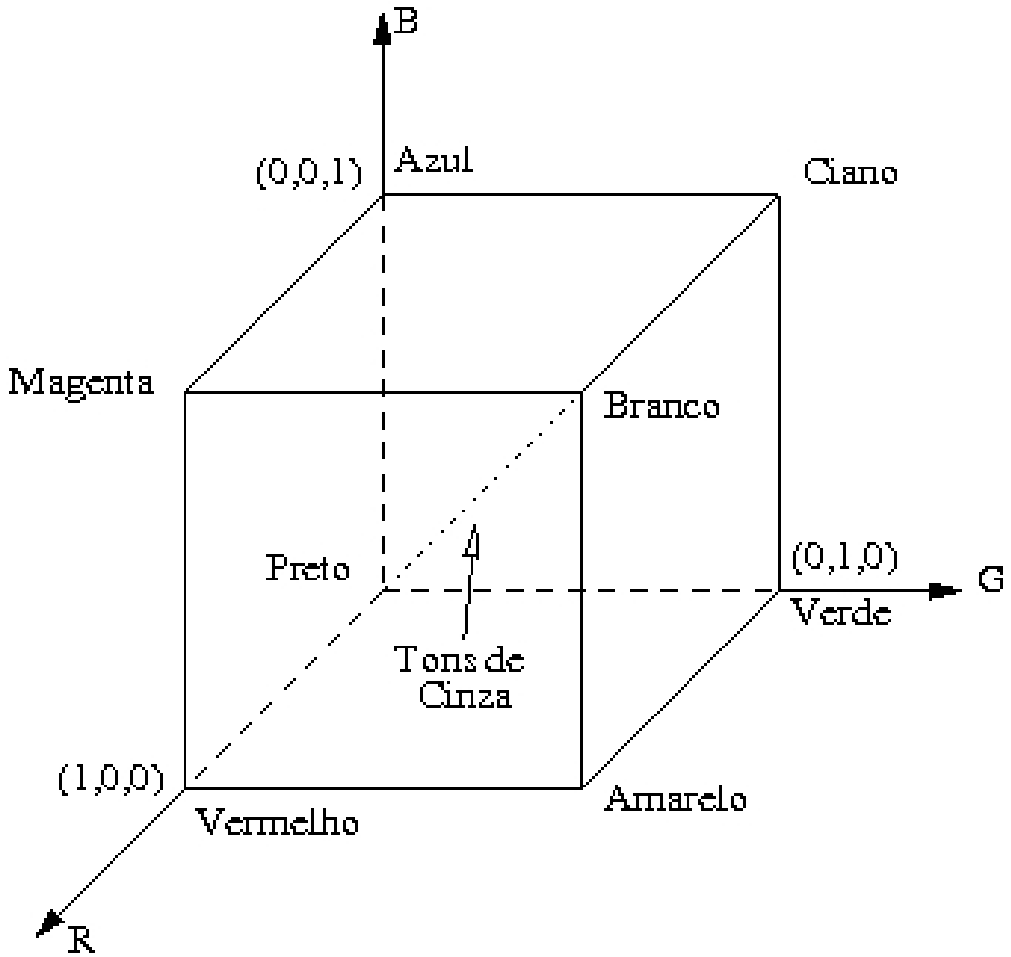
$$\varepsilon_S(f)(x) = \inf_{s \in S}\{f(x+s)\} \quad \text{e} \quad \delta_S(f)(x) = \sup_{s \in S}\{f(x+s)\}.$$

O **maior desafio** da morfologia matemática colorida é encontrar uma ordem apropriada de modo que $\mathbb{V}$ seja um reticulado completo!

Espaço RGB

No espaço RGB, denotado por $\mathbb{C}_{RGB} = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$, uma cor $c = (c_r, c_g, c_b) \in \mathbb{C}_{RGB}$ é escrita em termos das primitivas:

- Vermelho (R, *red*),
- Verde (G, *green*),
- Azul (B, *blue*).



Ordem Marginal

Podemos definir a seguinte ordem parcial em $\mathbb{C}_{RGB}$:

$$c \leq c' \quad \Longleftrightarrow \quad c_r \leq c'_r, \quad c_g \leq c'_g \quad \text{e} \quad c_b \leq c'_b.$$

Ordem Marginal

Podemos definir a seguinte ordem parcial em $\mathbb{C}_{RGB}$:

$$c \leq c' \quad \Longleftrightarrow \quad c_r \leq c'_r, \quad c_g \leq c'_g \quad \text{e} \quad c_b \leq c'_b.$$

Nesse caso, o ínfimo e o supremo de um conjunto de cores é determinado componente-a-componente.

Exemplo 6

$$\inf\{\underbrace{(1,1,0)}_{\text{amarelo}}, \underbrace{(1,0,1)}_{\text{magenta}}\} = \underbrace{(1,0,0)}_{\text{vermelho}},$$

e

$$\sup\{\underbrace{(1,1,0)}_{\text{amarelo}}, \underbrace{(1,0,1)}_{\text{magenta}}\} = \underbrace{(1,1,1)}_{\text{branco}}.$$

Erosão e Dilatação Marginal

A erosão e a dilatação de uma imagem colorida com a ordem marginal é determinada como segue:

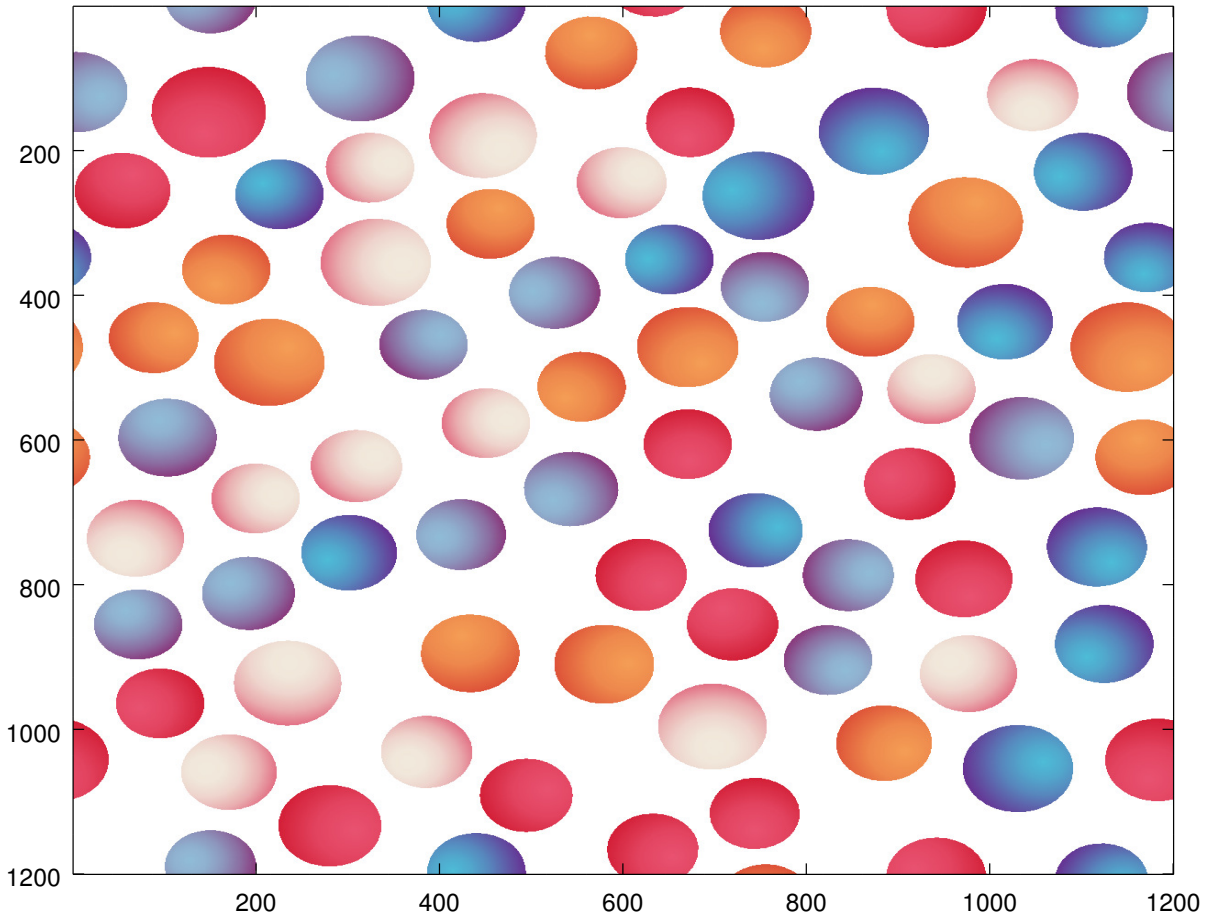
$$\varepsilon_S(f)(x) = \left(\inf_{s \in S}\{f_r(x+s)\}, \inf_{s \in S}\{f_g(x+s)\}, \inf_{s \in S}\{f_b(x+s)\} \right),$$

e

$$\delta_S(f)(x) = \left(\sup_{s \in S}\{f_r(x+s)\}, \sup_{s \in S}\{f_g(x+s)\}, \sup_{s \in S}\{f_b(x+s)\} \right).$$

Exemplo – Erosão e Dilatação Marginal

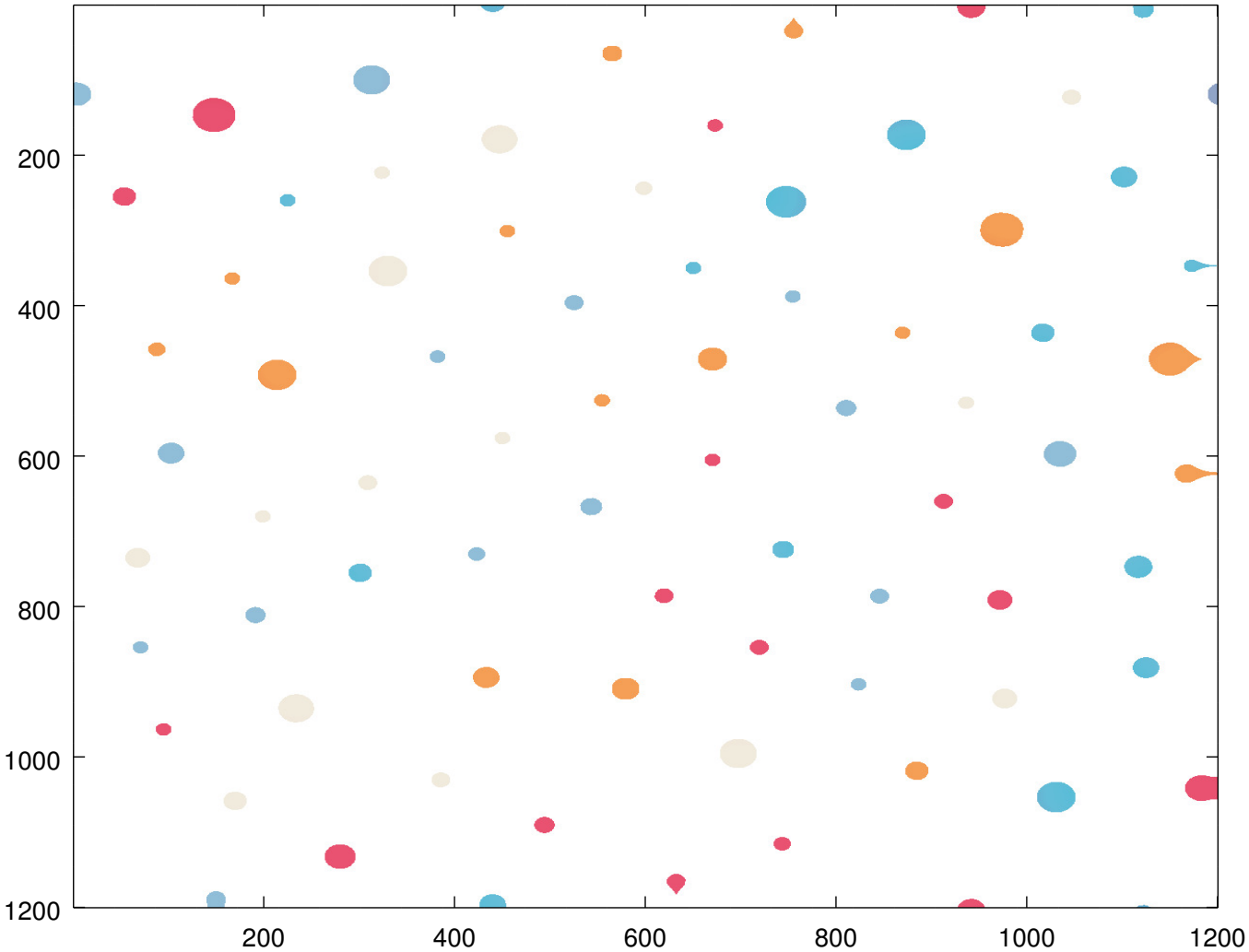
Imagem colorida f:



Fonte: `http://www.freepik.com`.

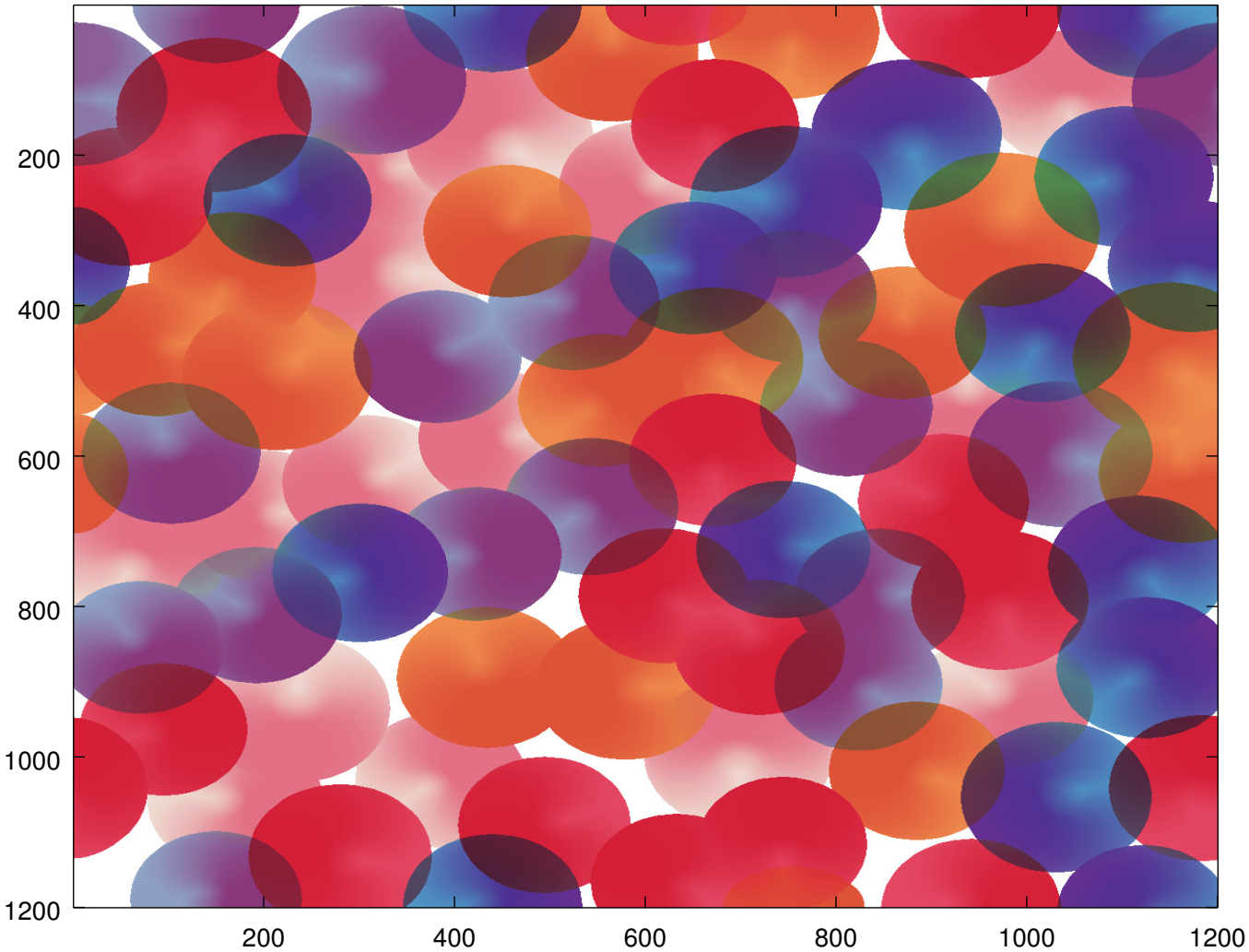
Exemplo – Erosão e Dilatação Marginal

Erosão da imagem colorida.



Exemplo – Erosão e Dilatação Marginal

Dilatação da imagem colorida.



Comentários:

- A abordagem marginal não leva em consideração a correlação entre os canais de cores!
- A abordagem marginal pode introduzir “cores falsas”, isto é, cores que não pertencem a imagem original!

Abordagem Lexicográfica

Na abordagem lexicográfica, as cores são ordenadas sequencialmente como segue:

$$c \leq c' \iff \begin{cases} c_r < c'_r, \\ c_r = c'_r \text{ e } c_g < c'_g, \\ c_r = c'_r,\ c_g = c'_g \text{ e } c_b \leq c'_b. \end{cases}$$

Exemplo 7

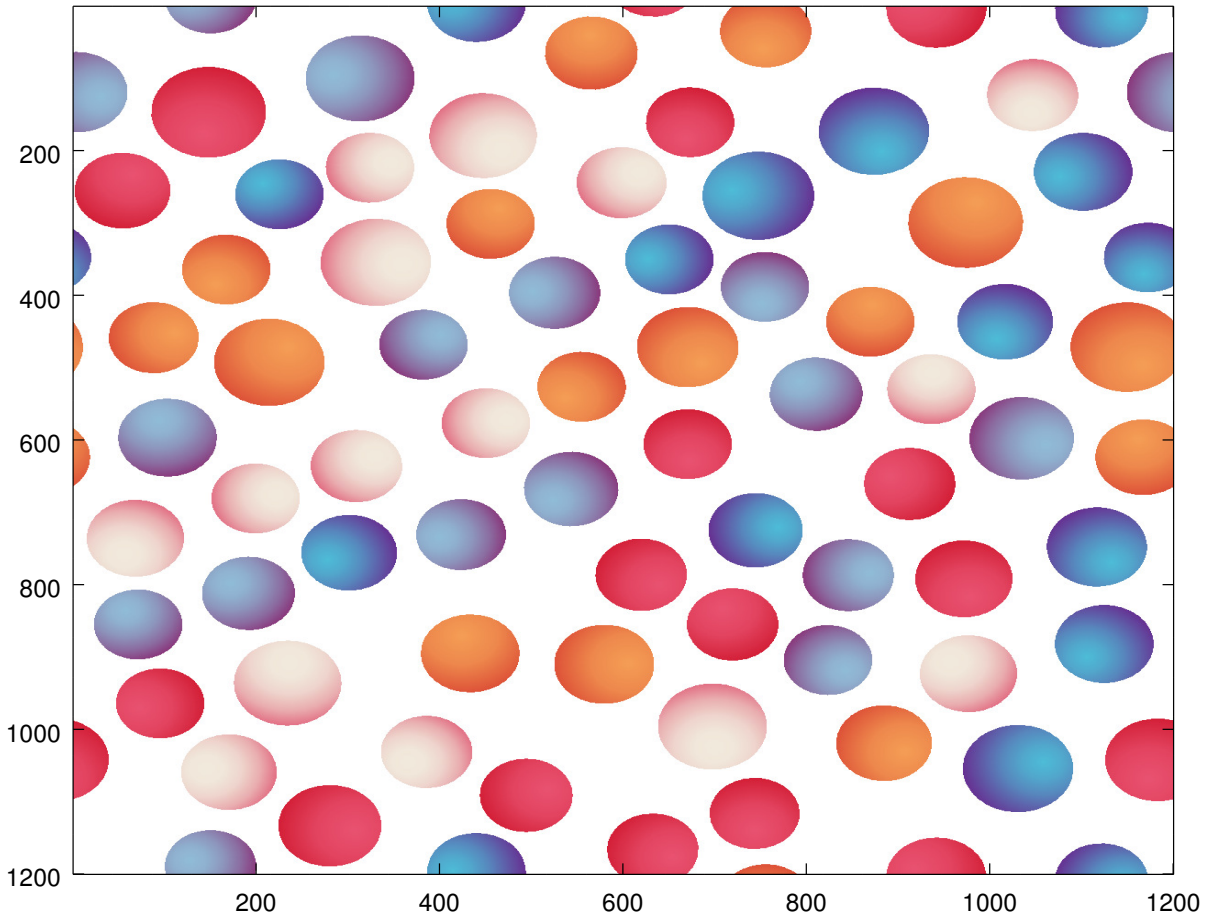
$$\inf\{\underbrace{(1,1,0)}_{\text{amarelo}}, \underbrace{(1,0,1)}_{\text{magenta}}\} = \underbrace{(1,0,1)}_{\text{magenta}},$$

e

$$\sup\{\underbrace{(1,1,0)}_{\text{amarelo}}, \underbrace{(1,0,1)}_{\text{magenta}}\} = \underbrace{(1,1,1)}_{\text{amarelo}}.$$

Exemplo – Erosão e Dilatação Lexicográfica

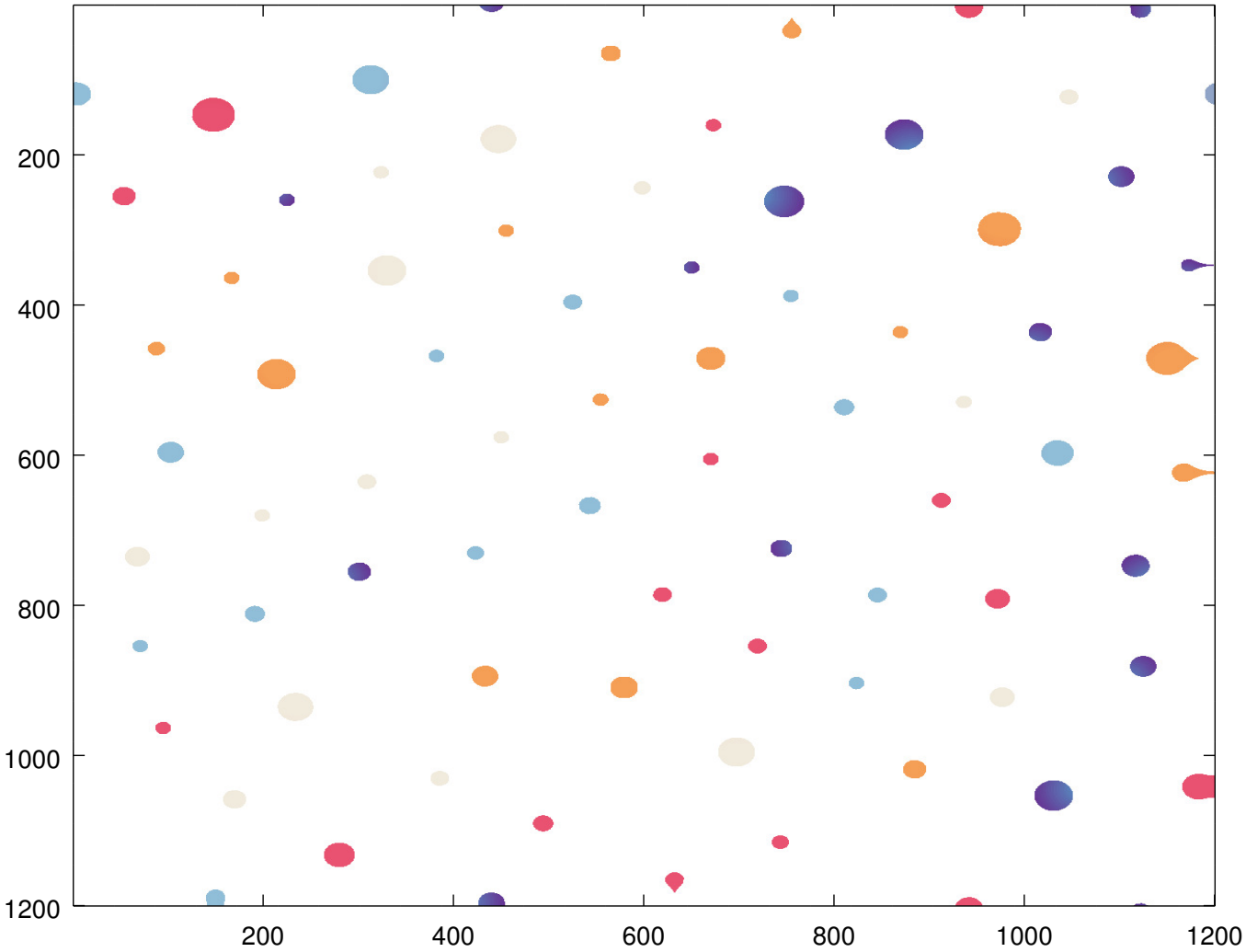
Imagem colorida f:



Fonte: `http://www.freepik.com`.

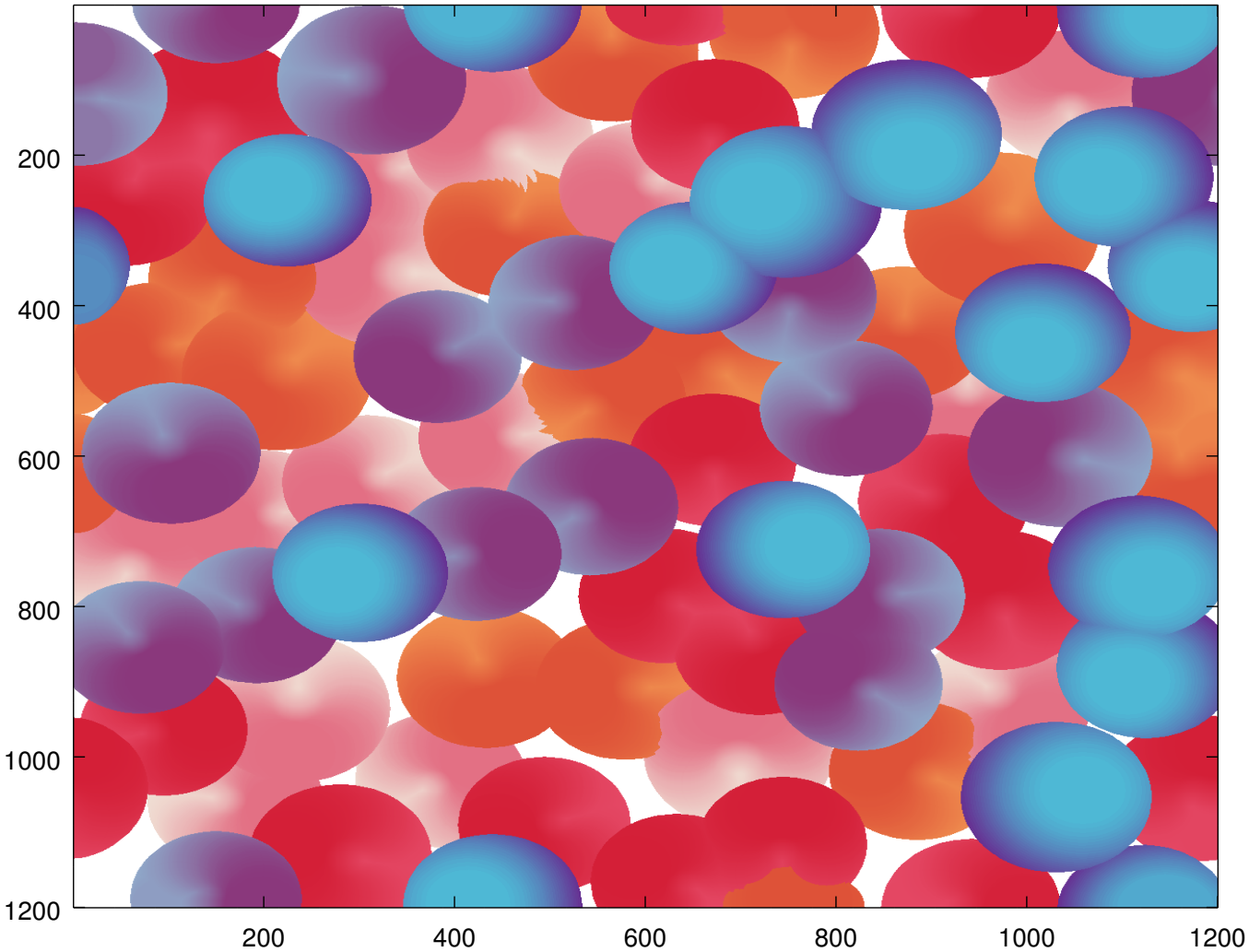
Exemplo – Erosão e Dilatação Lexicográfica

Erosão da imagem colorida.



Exemplo – Erosão e Dilatação Lexicográfica

Dilatação da imagem colorida.



Comentários:

A ordem lexicográfica é uma ordem total, isto é, sempre podemos comparar duas cores.

Comentários:

A ordem lexicográfica é uma ordem total, isto é, sempre podemos comparar duas cores.

Numa ordem total, tanto o supremo como o ínfimo de um conjunto finito é um elemento do conjunto.

Comentários:

A ordem lexicográfica é uma ordem total, isto é, sempre podemos comparar duas cores.

Numa ordem total, tanto o supremo como o ínfimo de um conjunto finito é um elemento do conjunto.

Uma ordem total, incluindo a ordem lexicográfica, não introduz cores falsas!

Comentários:

A ordem lexicográfica é uma ordem total, isto é, sempre podemos comparar duas cores.

Numa ordem total, tanto o supremo como o ínfimo de um conjunto finito é um elemento do conjunto.

Uma ordem total, incluindo a ordem lexicográfica, não introduz cores falsas!

Contudo, uma ordem total pode introduzir irregularidades na imagem multivalorada!

Irregularidade de uma Ordem Total

Uma ordem total não introduz cores falsas. Contudo, a topologia induzida por uma ordem total não reproduz a topologia natural de um espaço métrico:

Irregularidade de uma Ordem Total

Uma ordem total não introduz cores falsas. Contudo, a topologia induzida por uma ordem total não reproduz a topologia natural de um espaço métrico:

Teorema 8 (Chevallier and Angulo (2016))

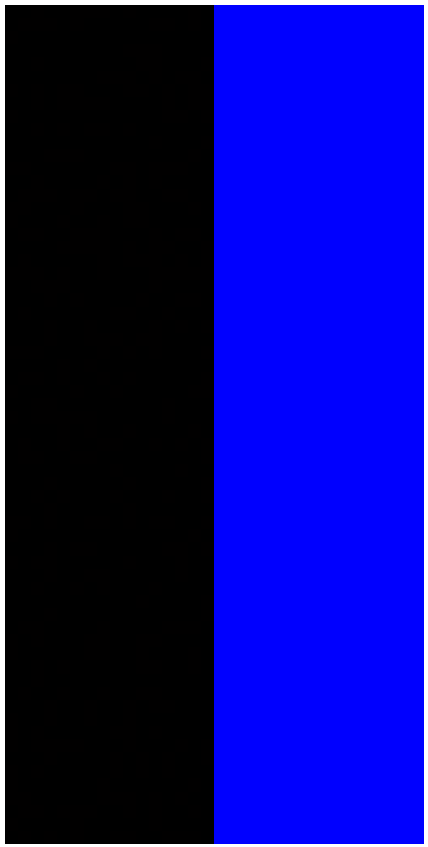
Seja $(\mathbb{V}, d)$ *um espaço métrico equipado com uma ordem total* $\leq$*. Se existem* $\tau > 0$ *e três pontos* $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{V}$ *tais que* $d(c_i, c_j) > \tau$ *para todo* $i \neq j$ *e o complemento* $B^c(c_i, \epsilon)$ *da bolas* $B(c_i, \epsilon)$ *são conexos, então existem pontos* $x, y, z \in \mathbb{V}$ *tais que*

$$x \leq y \leq z \quad mas \quad d(x, z) < d(x, y).$$

Exemplo da Irregularidade

Imagem com valore: $x = (0, 0, 0)$, $y = (0, 0, 1)$ e $z = (0.004, 0, 0)$.

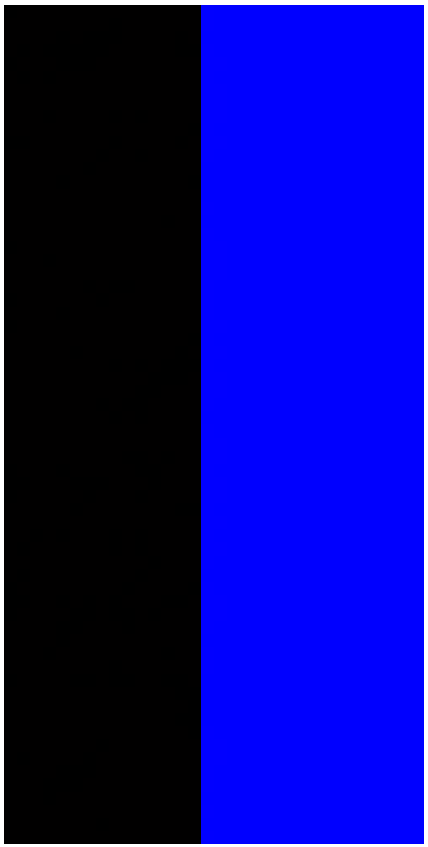
Imagem



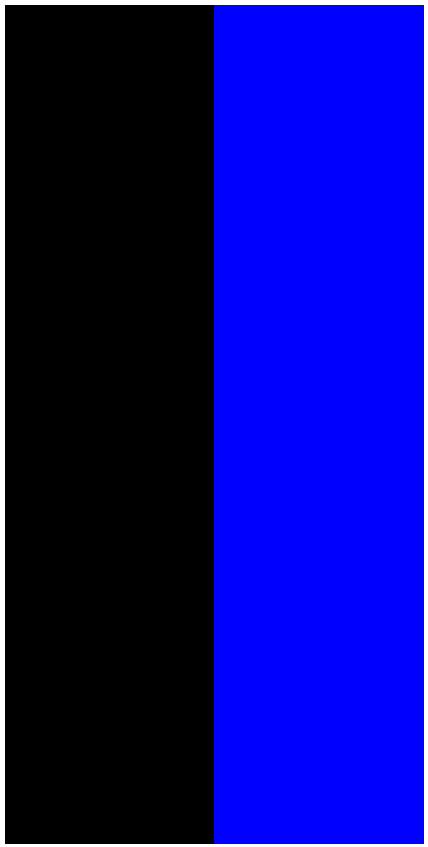
Exemplo da Irregularidade

Imagem com valore: $x = (0, 0, 0)$, $y = (0, 0, 1)$ e $z = (0.004, 0, 0)$.

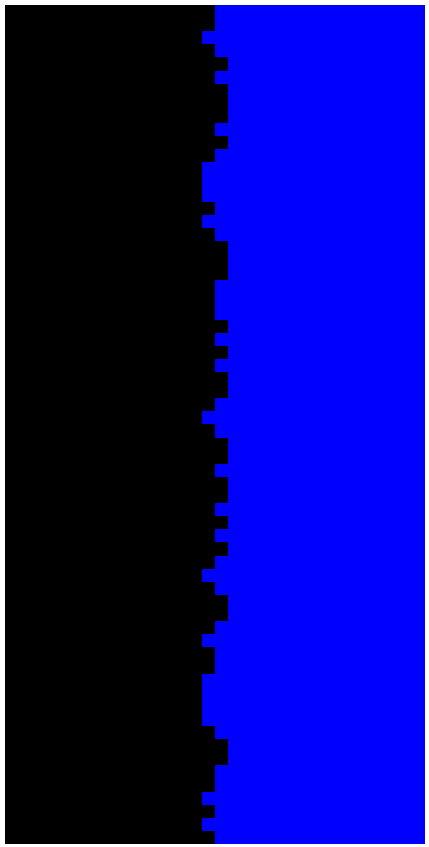
Marginal



Imagem



Lexicográfica



Como medir a irregularidade de um operador morfológico?

Soma das Distâncias Ponto-a-Ponto

Considere uma imagem multivalorada $f : \mathcal{D} \to \mathbb{V}$ e seja $g = \psi(\mathbf{f})$ a imagem obtida por um operador morfológico multivalorado.

Soma das Distâncias Ponto-a-Ponto

Considere uma imagem multivalorada $f : \mathcal{D} \to \mathbb{V}$ e seja $g = \psi(\mathbf{f})$ a imagem obtida por um operador morfológico multivalorado.

A soma das distâncias ponto-a-ponto de f e g é

$$\Pi(f, g) = \sum_{x \in \mathcal{D}} d\big(f(x), g(x)\big). \tag{1}$$

Soma das Distâncias Ponto-a-Ponto

Considere uma imagem multivalorada $f : \mathcal{D} \to \mathbb{V}$ e seja $g = \psi(\mathbf{f})$ a imagem obtida por um operador morfológico multivalorado.

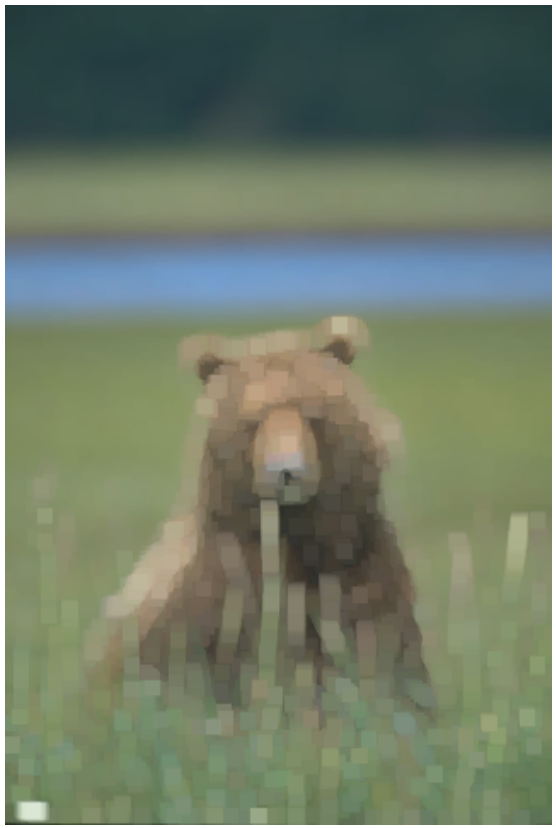
A soma das distâncias ponto-a-ponto de f e g é

$$\Pi(f, g) = \sum_{x \in \mathcal{D}} d\big(f(x), g(x)\big). \tag{1}$$

Infelizmente, a soma das distâncias ponto-a-ponto não é uma boa medida para a irregularidade.

Exemplo – Dilatação por um quadrado 9×9

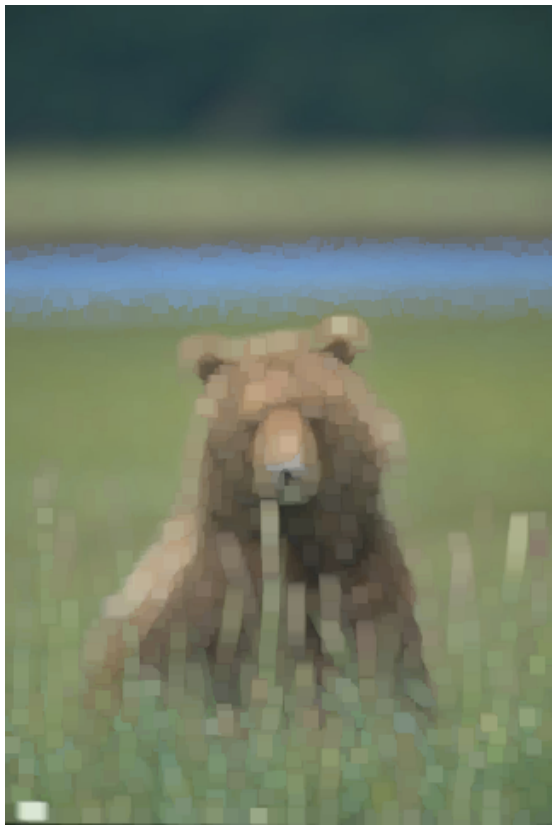
Marginal



$\Pi = 14.165$

Imagem

Lexicográfica



$\Pi = 13.444$

Exemplo - Abertura por um quadrado 9×9

Marginal

$\Pi_1 = 8.370$

Imagem

Lexicográfica

$\Pi_1 = 8.520$

Métrica de Wasserstein

A métrica de Wasserstein, também chamada distância do movedor de terra ou distância de Kantorovich-Rubinstein, é formulada como um problema de transporte (Peyré and Cuturi, 2019).

Métrica de Wasserstein

A métrica de Wasserstein, também chamada distância do movedor de terra ou distância de Kantorovich-Rubinstein, é formulada como um problema de transporte (Peyré and Cuturi, 2019).

O objetivo de um problema de transporte é minimizar o custo de entrega de itens de n fábricas para m lojas.

Métrica de Wasserstein

A métrica de Wasserstein, também chamada distância do movedor de terra ou distância de Kantorovich-Rubinstein, é formulada como um problema de transporte (Peyré and Cuturi, 2019).

O objetivo de um problema de transporte é minimizar o custo de entrega de itens de n fábricas para m lojas.

No nosso caso, computamos o custo mínimo para transformar f em $g = \psi(f)$.

Métrica de Wasserstein

A métrica de Wasserstein, também chamada distância do movedor de terra ou distância de Kantorovich-Rubinstein, é formulada como um problema de transporte (Peyré and Cuturi, 2019).

O objetivo de um problema de transporte é minimizar o custo de entrega de itens de n fábricas para m lojas.

No nosso caso, computamos o custo mínimo para transformar f em $g = \psi(f)$.

Sejam $F = \{f_1, \ldots, f_n\}$ e $G = \{g_1, \ldots, g_m\}$ o conjunto de valores de f e g, respectivamente.

Métrica de Wasserstein

A métrica de Wasserstein, também chamada distância do movedor de terra ou distância de Kantorovich-Rubinstein, é formulada como um problema de transporte (Peyré and Cuturi, 2019).

O objetivo de um problema de transporte é minimizar o custo de entrega de itens de n fábricas para m lojas.

No nosso caso, computamos o custo mínimo para transformar f em $g = \psi(f)$.

Sejam $F = \{f_1, \ldots, f_n\}$ e $G = \{g_1, \ldots, g_m\}$ o conjunto de valores de f e g, respectivamente.

O custo para transformar f_i em g_j é

$$c_{ij} = d(f_i, g_j), \quad \forall i = 1, \ldots, n \quad \text{e} \quad j = 1, \ldots, m.$$

A métrica Wasserstein, denotada por $\mathcal{W}$, é dada por

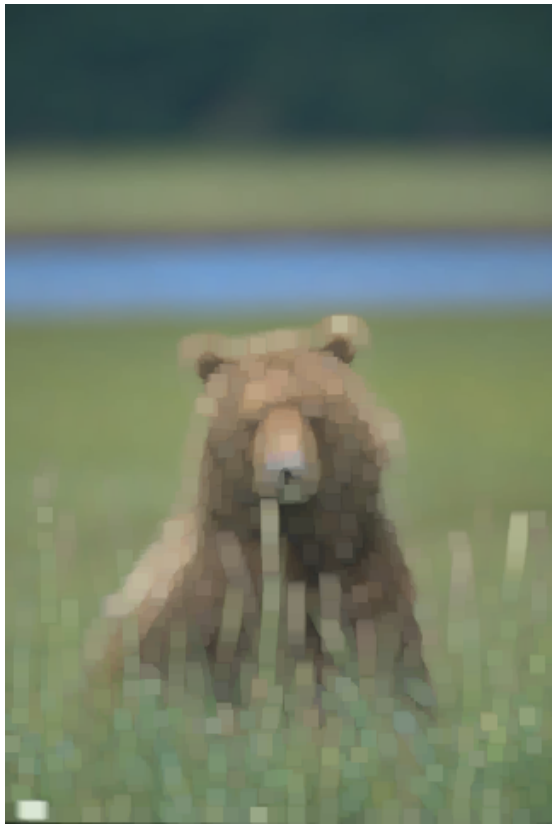
$$\mathcal{W}(f,g) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}, \tag{2}$$

em que x_{ij} é solução do problema de programação linear

$$\begin{cases} \text{minimize} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \\ \text{sujeito à} & \displaystyle\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = \text{Card}(\{x : f(x) = f_i\}), \quad \forall i = 1,\ldots,n, \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = \text{Card}(\{x : g(x) = g_j\}), \quad \forall j = 1,\ldots,m, \\ & x_{ij} \geq 0, \quad \forall i = 1,\ldots,n,\ \forall j = 1,\ldots,m. \end{cases} \tag{3}$$

Exemplo – Dilatação por um quadrado 9×9

Marginal

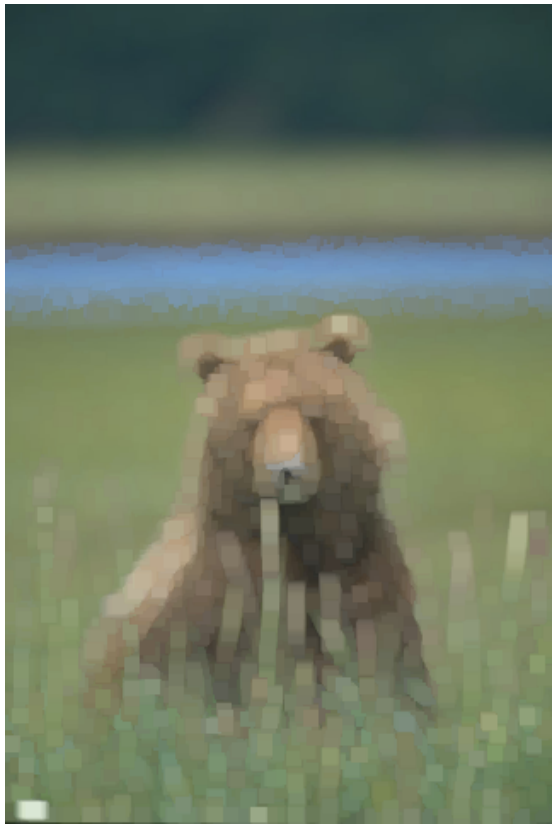


$\mathcal{W} = 14.144$

$\Pi = 14.165$

Imagem

Lexicográfica



$\mathcal{W} = 13.237$

$\Pi = 13.444$

Exemplo - Abertura por um quadrado 9×9

Marginal

$\mathcal{W} = 8.265$

$\Pi_1 = 8.370$

Imagem

Lexicográfica

$\mathcal{W} = 8.134$

$\Pi_1 = 8.520$

Índice de Irregularidade

Definimos o índice de irregularidade em termos do quociente entre a métrica de Wasserstein e a soma das distâncias ponto-a-ponto:

$$\Phi(f,g) = \begin{cases} \frac{\Pi(f,g) - \mathcal{W}(f,g)}{\Pi(f,g)}, & \Pi_p(f,g) \neq 0, \\ 0, & \Pi_p(f,g) = 0. \end{cases}$$

Índice de Irregularidade

Definimos o índice de irregularidade em termos do quociente entre a métrica de Wasserstein e a soma das distâncias ponto-a-ponto:

$$\Phi(f,g) = \begin{cases} \frac{\Pi(f,g) - \mathcal{W}(f,g)}{\Pi(f,g)}, & \Pi_p(f,g) \neq 0, \\ 0, & \Pi_p(f,g) = 0. \end{cases}$$

Equivalentemente, tem-se:

$$\Phi(f,g) = \begin{cases} 0, & \text{se } \Pi_p(f,g) = 0, \\ 1 - \frac{\mathcal{W}(f,g)}{\Pi(f,g)}, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{4}$$

Índice de Irregularidade

Definimos o índice de irregularidade em termos do quociente entre a métrica de Wasserstein e a soma das distâncias ponto-a-ponto:

$$\Phi(f,g) = \begin{cases} \frac{\Pi(f,g) - \mathcal{W}(f,g)}{\Pi(f,g)}, & \Pi_p(f,g) \neq 0, \\ 0, & \Pi_p(f,g) = 0. \end{cases}$$

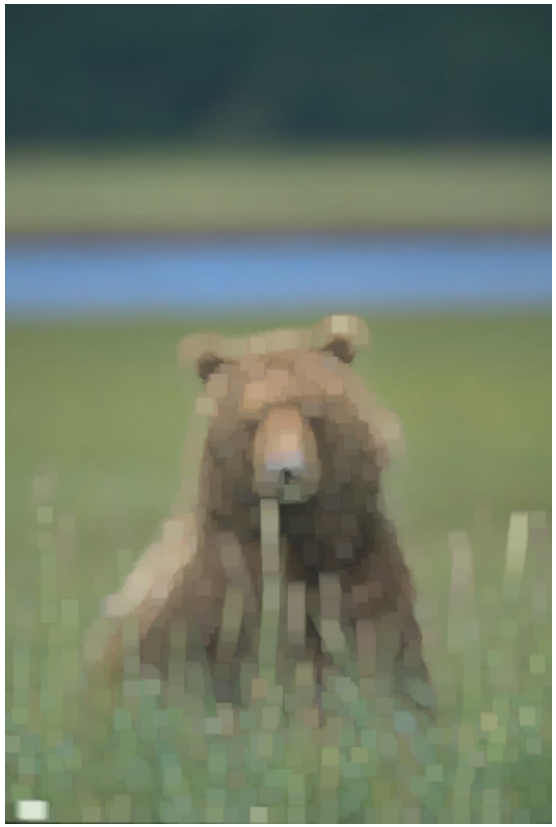
Equivalentemente, tem-se:

$$\Phi(f,g) = \begin{cases} 0, & \text{se } \Pi_p(f,g) = 0, \\ 1 - \dfrac{\mathcal{W}(f,g)}{\Pi(f,g)}, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{4}$$

O índice de irregularidade é simétrico e limitado. Além disso, $\Phi(f,g)$ é uma quantidade adimensional.

Exemplo – Dilatação por um quadrado 9×9

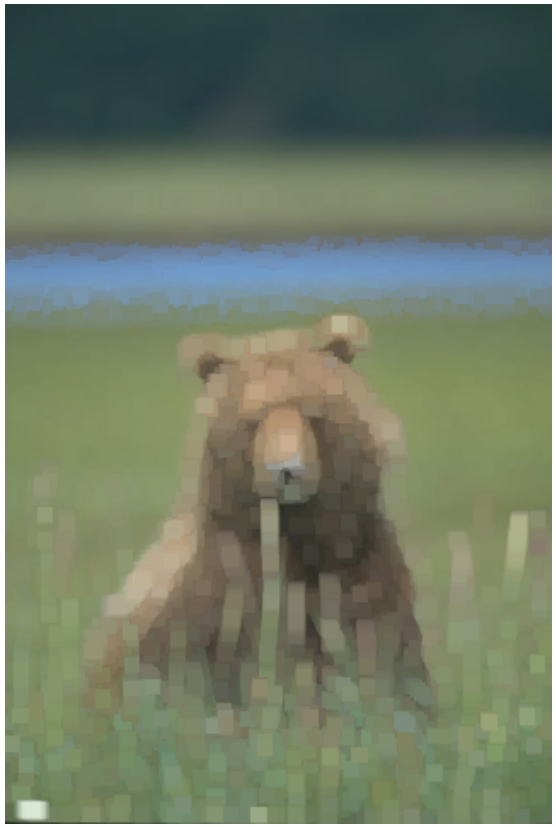
Marginal



$\Phi = 0,15\%$
$\mathcal{W} = 14.144$
$\Pi = 14.166$

Imagem

Lexicográfica



$\Phi = 1,54\%$
$\mathcal{W} = 13.237$
$\Pi = 13.444$

Exemplo - Abertura por um quadrado 9×9

Marginal

$\Phi = 1,25\%$
$\mathcal{W} = 8.265$
$\Pi = 8.370$

Imagem

Lexicográfica

$\Phi = 4,54\%$
$\mathcal{W} = 8.134$
$\Pi = 8.520$

Considerações Finais

O índice de irregularidade quantifica bem a irregularidade introduzida por um operador morfológico multivalorado.

Considerações Finais

O índice de irregularidade quantifica bem a irregularidade introduzida por um operador morfológico multivalorado.

Porém, o cálculo do índice de irregularidade requer a resolução de um problema de programação linear com mn variáveis, onde m e n são o número de valores de pixel distintos das imagens f e g.

Considerações Finais

O índice de irregularidade quantifica bem a irregularidade introduzida por um operador morfológico multivalorado.

Porém, o cálculo do índice de irregularidade requer a resolução de um problema de programação linear com mn variáveis, onde m e n são o número de valores de pixel distintos das imagens f e g.

Em situações práticas, a dimensão do problema de programação linear é extremamente grande, impossibilitando sua resolução.

Considerações Finais

O índice de irregularidade quantifica bem a irregularidade introduzida por um operador morfológico multivalorado.

Porém, o cálculo do índice de irregularidade requer a resolução de um problema de programação linear com mn variáveis, onde m e n são o número de valores de pixel distintos das imagens f e g.

Em situações práticas, a dimensão do problema de programação linear é extremamente grande, impossibilitando sua resolução.

Para contornar essa carga computacional, calculamos uma aproximação da medida de Wasserstein (Valle et al., 2021).

Muito grato pela atenção!

References (1)

G. Birkhoff. *Lattice Theory*. American Mathematical Society, Providence, 3 edition, 1993.

E. Chevallier and J. Angulo. The Irregularity Issue of Total Orders on Metric Spaces and Its Consequences for Mathematical Morphology. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 54(3): 344–357, 3 2016. doi: 10.1007/s10851-015-0607-7.

H. Heijmans. *Morphological Image Operators*. Academic Press, New York, NY, 1994.

H. J. A. M. Heijmans. Mathematical Morphology: A Modern Approach in Image Processing Based on Algebra and Geometry. *SIAM Review*, 37(1):1–36, 1995.

References (2)

G. Peyré and M. Cuturi. Computational optimal transport. *Foundations and Trends in Machine Learning*, 11(5-6):1–257, 2019. ISSN 19358245. doi: 10.1561/2200000073. URL http://dx.doi.org/10.1561/2200000073.

J. Serra. *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Academic Press, London, 1982.

P. Soille. *Morphological Image Analysis*. Springer Verlag, Berlin, 1999.

References (3)

M. E. Valle, S. Francisco, M. A. Granero, and S. Velasco-Forero. Measuring the Irregularity of Vector-Valued Morphological Operators Using Wasserstein Metric. In *In: Lindblad J., Malmberg F., Sladoje N. (eds) Discrete Geometry and Mathematical Morphology. DGMM 2021. Lecture Notes in Computer Science*, volume 12708, pages 512–524. Springer, Cham, 5 2021. doi: 10.1007/978-3-030-76657-3{_}37.