

$$1. (a) I(x, y) = N(x \dot{+} N(y))$$

(i) I extende implicação crisp:

$$\Rightarrow \begin{array}{c|cc} & x & y \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Sabemos que $\dot{+}$ extende $\wedge: \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$
e N extende $\neg: \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$

Sabemos que $N(0) = 1$ e $N(1) = 0$

$$\text{Então: } I(0, 0) = N(0 \dot{+} N(0)) = N(0 \dot{+} 1) = N(0) = 1$$

$$I(0, 1) = N(0 \dot{+} N(1)) = N(0 \dot{+} 0) = N(0) = 1$$

$$I(1, 0) = N(1 \dot{+} N(0)) = N(1 \dot{+} 1) = N(1) = 0$$

$$I(1, 1) = N(1 \dot{+} N(1)) = N(1 \dot{+} 0) = N(1) = 0$$

(ii) $I(\cdot, y)$ é decrescente $\forall y \in [0, 1]$:

Seja y arbitrário, fixo

$\forall x \leq z \in [0, 1]$ temos

$$I(x, y) = N(\underbrace{x \dot{+} N(y)}_{\leq z \dot{+} N(y)}) \geq N(z \dot{+} N(y)) = I(z, y)$$

(porque N é decrescente e $\dot{+}$ é crescente em ambos os argumentos)

(iii) $I(x, \cdot)$ é crescente $\forall x \in [0, 1]$:

Seja x arbitrário, fixo

$\forall y \leq z \in [0, 1]$ temos

$$I(x, y) = N(\underbrace{x \dot{+} N(y)}_{\geq N(z)}) \leq N(x \dot{+} N(z)) = I(x, z)$$