Cálculo Numérico (MS211) PROVA 2 (16/06/2010)

Nome: ______________________________ RA: __________ Turma: ______

Trabalhe com *radianos* e 4 *dígitos decimais*!!! Justifique as suas respostas e explicite todas as contas. Boa sorte e bom divertimento!

---

1. O sistema LORAN (LOng RAnge Navigation) calcula a posição de um barco no mar a partir de sinais de dois pares de transmissores fixos. O sistema calcula a diferença de tempo entre o recebimento dos sinais dos dois transmissores de cada um dos pares. Uma dada diferença constante de tempo entre os sinais pode ser representada por uma linha hiperbólica de posição. Portanto, a posição do barco é dada pela interseção de duas hiperbolas como por exemplo:

$$\begin{cases} \frac{(x_1)^2}{186^2} - \frac{(x_2)^2}{300^2-186^2} & = & 1 \\ \frac{(x_2-500)^2}{279^2} - \frac{(x_1-300)^2}{500^2-279^2} & = & 1\,. \end{cases}$$

   (a) Encontre a matriz Jacobiana do sistema. [0.5 pts]

   (b) Partindo do chute inicial $x^{(0)} = (250, 200)^T$, execute o método de Newton utilizando a última tabela do verso até $||F(x^{(k)})||_\infty < 0.1$ ou $||x^{(k)} - x^{(k-1)}||_\infty < 0.1$ (Dica: pelo menos um dos dois critérios é satisfeito em ≤ 1 passo). Qual é a aproximação obtida da posição do barco? [2 pts]

   (c) Qual é o problema se escolhermos $(0, 0)^T$ como chute inicial? [0.5 pts]

2. A tabela seguinte mostra o número de usuários de internet entre 100 habitantes nos anos 1998 até 2007.

Ano t	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
% Usuários	1	1	2	3	4	5	7	9	12	17

   (a) Seja $x = t - 1998$. Utilize o método dos quadrados mínimos para ajustar uma curva exponencial da forma ae^{bx} aos dados da tabela. [1.5 pts]

   (b) Qual é o erro obtido neste ajuste? Em outras palavras, qual é a norma euclidiana do resíduo? [0.5 pts]

   (c) Utilize o seu resultado para estimar a percentagem de usuários de internet nos países em desenvolvimento no ano 2010. [0.5 pts]

3. Considere a seguinte tabela de dados:

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	-1	1	-4	4	0

   (a) Determine o polinômio q_2 de grau ≤ 2 que interpola f em $2, 3, 4$. [1 pt]

   (b) Seja p_2 o polinômio dado por $-3.5x^2 + 5.5x - 1$ e seja

$$g(x) = \begin{cases} p_2(x) & \text{se } x \leq 2 \\ q_2(x) & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

   Verfique se g interpola os dados. [0.5 pts]

(c) Verfique se g é um spline cúbico interpolante. [1 pt]

4. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' &= \sin(y) \cdot e^x + y^2 \\ y(1) &= 2 \end{cases}$$

Aplique o método de Euler Aperfeiçoado (de preferência em forma tabelar!) com $h = 0.1$ para encontrar uma aproximação para $y(1.2)$. Qual é a aproximação obtida? [2 pts]

ALGUMAS TABELAS

x	y	$y' = f(x,y)$	$\Delta y \approx y'h$

x	y	$y' = f(x,y)$	y''	$\Delta y \approx y'h + y''\frac{h^2}{2}$

x_k	y_k	$y'_k = f(x_k, y_k)$	$\bar{y}_{k+1} = y_k + y'_k h$	$\bar{y}'_{k+1} = f(x_{k+1}, \bar{y}_{k+1})$	$\Delta y_k \approx (y'_k + \bar{y}'_{k+1})\frac{h}{2}$

---

k	$x^{(k)}$	$F(x^{(k)})$	$\|\|F(x^{(k)})\|\|_\infty$	$\|\|s^{(k-1)}\|\|_\infty$	$s^{(k)}$
0				$-$	