MS211 - Turma K - Prova 2 - 25/11/2025

Nome: RA: # de Faltas:

Utilize **4 digitos decimais** em todas as questões! Não precisa escrever zeros não significativos. (Por exemplo, pode escrever 0.5 ao invés de 0.5000.) Somente faça o que está pedido. **Justifique as suas respostas!** Boa prova!

1. O objetivo dessa questao é modelar o movimento de um objeto de massa m preso a uma mola com Amortecimento (Massa-Mola Amortecido) Desconsiderando forças externas, o sistema está sujeito a duas forças principais:

   - Força Elástica (F_k): Restauradora, que obedece à Lei de Hooke: $F_k = -ky$, sendo k a constante elástica;
   - Força de Amortecimento: $F_c = -cy'$.

   Seja $y(t)$ é o deslocamento do objeto em relação à posição de equilíbrio no tempo t (em segundos). Obtemos

$$\begin{cases} y'' & = & -\frac{1}{m}(ky + cy') \\ y(0) & = & y_0 \\ y'(0) & = & y'_0 \end{cases} \tag{1}$$

   (a) Transforme o problema (1) em um PVI vetorial. Para tanto, use Y para denotar o vetor composto de y e y', i.e., $(y, y')^T$, e preenche os espaços marcados com ... em baixo.

$$\begin{cases} Y' = \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{pmatrix} \\ \\ Y(0) = \begin{pmatrix} \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \end{pmatrix} \end{cases}$$

   (b) Por exemplo considere uma roda de um carro de passeio com $k = 22000$ (N/m, i.e., Newtons por metro), massa suspensa $m \approx 150$(kg) e coeficiente $c = 1450$ (Ns/m, i.e., Newtons por metro por segundo. Seja $y_0 = 0$ (m). Suponha que a roda passa por um buraco, o que leva a $y'(0) = 0.7$ (m/s). (Este valor positivo de y' significa que a mola está se esticando por causa do buraco.)

   Aplique o método de Euler Aperfeiçoado em forma tabelar com $h = 0.1$ (s). Preenche os espaços marcados com ... da tabela da forma seguinte. Utilize a fórmula específica da derivada para este problema particular sempre que aparecem expressões de derivadas. Faça uma *cópia dessa tabela em formato paisagem no verso desta página.* Durante a prova, a Questão 1 será colocada no telão para facilitar a sua tarefa. [2.25 pts]

t_k	$Y_k = \begin{pmatrix} \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \end{pmatrix}$	$Y'_k = \begin{pmatrix} \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \end{pmatrix}$	$\bar{Y}_{k+1} = \cdots\cdots = \begin{pmatrix} \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \end{pmatrix}$	$\bar{Y}'_{k+1} = \begin{pmatrix} \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \end{pmatrix}$	$\Delta Y_k =$ ....
0	....	....	....	....	....
0.1	....				

   (c) Qual é a sua estimativa para o deslocamento vertical da roda no tempo 0.1 segundos? [0.25 pt]

2. Considere as temperaturas médias mensais em Campinas listadas em baixo.

Tabela 1: Temperatura Média Mensal Observada (°C) em Campinas, SP (Fev, Abr, Jun, Ago, Out 2025)

Mês	Fev	Abr	Jun	Ago	Out
Média (°C)	25,1	21,5	18,3	20,4	23,7

(a) Utilize o método dos quadrados mínimos para ajustar uma curva da forma seguinte a estes dados:

$$\alpha_1 + \alpha_2 \cos(\omega t) + \alpha_3 \sin(\omega t).$$

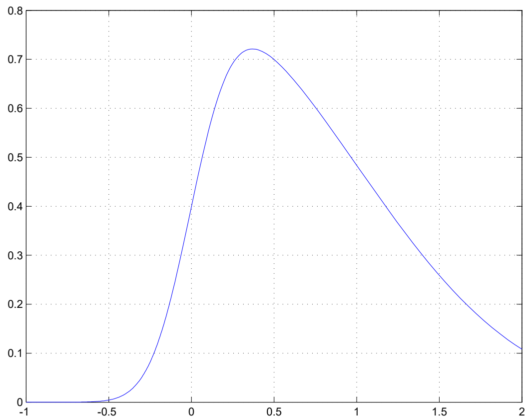
Aqui $t = 2, 4, 6, 8$ e 10 se refere a fevereiro, abril, junho, agosto e outubro, respectivamente. Para tanto, você deve escolher o parâmetro ω em avanço levando em conta que a curva a ser utilizada no ajuste deve ser periódica e o período deve ser 12 meses, quer dizer, para $t = 12$, devemos obter $\omega t = 2\pi$. Note que cos e sin são avaliados em radianos.

Explique como a matriz utilizada no processo é construida, escreve o sistema linear a ser resolvido e resolve-lo. Quais são a solução $\alpha^* = [\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*]^T$ e a função que é utilizada no ajuste? [2.25 pts]

(b) Calcule o residuo do ajuste determinado no item (a). [0.5 pts]

(c) Utilize a função encontrada no item (a) para estimar as temperaturas médias em Campinas no mês de dezembro de 2025. [0.25 pts]

3. Em teoria da probabilidade e estatística, a distribuição normal assimétrica é uma distribuição de probabilidade contínua que generaliza a distribuição normal para permitir assimetria não nula. O gráfico da função f de densidade de probabilidade da distribuição normal assimétrica padrão com parâmetro $\alpha = 5$ é plotado em baixo.



Seguem alguns valores de f:

Tabela 2: Valores da função de densidade de probabilidade da distribuição normal assimétrica padrão ($\alpha = 5$)

x	-0.50	-0.25	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
$f(x)$	0.0044	0.0816	0.3989	0.6917	0.7001	0.6022	0.4840

(a) Utilize interpolação polinomial *quadrática* pela forma de Newton para encontrar o polinômio $p_2(x)$ de grau ≤ 2 que interpola $p(x)$ nos pontos 0.25, 0.5 e 0.75. Lembre-se que

$$p_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \ldots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}).$$

[0.75 pt]

(b) Utilize o polinômio $p_2(x)$, encontrado no item (a) para estimar x^* que satisfaz $f(x^*) = \max\{f(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ e $y^* = f(x^*)$. [0.75 pt]

(c) Utilize *interpolação polinomial quadrática inversa* pela forma de Newton para estimar o $\xi \in [-0.5, 0]$ tal que $f(\xi) = 0.2$. Para tanto, use os nós de interpolação mais apropriados. [1 pt]

4. Considere a tabela apresentada na Questão 3 de novo.

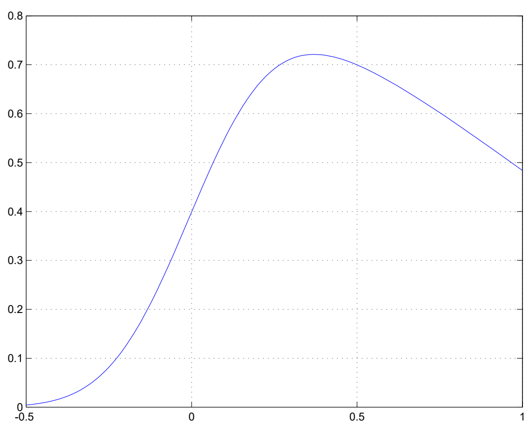
Tabela 3: Valores da função de densidade de probabilidade da distribuição normal assimétrica padrão ($\alpha = 5$)

x	-0.50	-0.25	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
$f(x)$	0.0044	0.0816	0.3989	0.6917	0.7001	0.6022	0.4840

(a) Utilize a *Regra de Simpson Repetida com 3 subintervalos* (usados para efeitos de interpolação) para estimar $\int_{-0.5}^{1} f(x)dx$. Lembre-se que a Regra de Simpson Repetida, que utiliza $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ como nós de interpolação, é dada por

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\big[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \ldots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\big].$$

Em seguida, utilize a figura seguinte para fazer uma interpretação gráfica da área que corresponde a essa estimativa de $\int_{-0.5}^{1} f(x)dx$. Sombreie a área em questão usando um lápis e marque os nós de interpolação utilizados usando cruzes. A sua interpretação gráfica não precisa ser exata, mas deve indicar claramente que você entendeu o que a ideia por trás da Regra de Simpson Repetida. [1 pt]



(b) Utilize a Regra dos Trapézios Repetida com 3 subintervalos (usados para efeitos de interpolação) para estimar $\int_{-0.5}^{1} f(x)dx$. Lembre-se que a Regra dos Trapézios Repetida, que utiliza $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ como nós de interpolação, é dada por

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\big[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-2}) + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\big].$$

[0.5 pt]

Vire a página!

(c) Utilize a figura seguinte para fazer uma interpretação gráfica da área que corresponde à estimativa de $\int_{-0.5}^{1} f(x)dx$ dada pela Regra dos Retângulos Repetida com 3 subintervalos (usados para efeitos de interpolação). Sombreie a área em questão usando um lápis e marque os nós de interpolação utilizados usando cruzes. [0.5 pt]