Cálculo Numérico (MS211) PROVA 2 (20/06/2013)

Nome: _____ RA: _____ Turma: _____

**Trabalhe com *radianos* e com pelo menos 4 *dígitos decimais*! Justifique as suas respostas!**

---

1. As populações de uma espécie de presas, denotada por $y_1$, e uma espécie de predatores, denotada por $y_2$, podem ser modeladas pelo seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{cases} y_1' &= y_1 - ay_1y_2 \\ y_2' &= by_1y_2 - cy_2 \end{cases}$$

Sejam $a = 0.5$, $b = 0.6$ e $c = 0.7143$. Considere as condições iniciais $y_1(0) = 1$ e $y_2(0) = 1$, onde as populações foram normalizadas tais que $y_1$ e $y_2$ possam ser tratados como variáveis contínuas.

(a) Transforme este problema em um PVI vetorial. [0.5 pts]

(b) Aplique o método de Euler Aperfeiçoado em forma tabelar com $h = 1$ para estimar as populações normalizadas no tempo $t = 2$. Quais são os valores encontrados das populações das espécies de presas e predadores? [2 pts]

2. Considere a seguinte integral:

$$\int_1^2 \frac{e^x}{x} dx$$

(a) Aproxime o valor desta integral numéricamente utilizando a regra de Simpson Repetida com 2 subintervalos. [1 pt]

(b) Estime o valor desta integral usando Quadratura Gaussiana (com dois pontos). [1 pt]

(c) Visto o fato que o erro cometido na aproximação da integral usando Quadratura Gaussiana é

$$E_{QG} = \frac{(b-a)^3 2^4}{3(4!)^3} f^{(4)}(\xi)$$

para algum $\xi \in (a, b)$, quais das duas alternativas ((a) ou (b)) você escolharia para aproximar a integral? [0.5 pts]

3. Considere o problema de aproximação seguinte que occorre na área de processamento de imagens hiperespectrais em sensoriamento remoto

$$\mathbf{x} \approx \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{e}_i \,,$$

onde $\mathbf{x}, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^m$ com $m > n$.

(a) Dado os vetores $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ e $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^m$ para $i = 1, \ldots, n$, explique como encontrar um vetor $\mathbf{a}^* = (a_1^*, \ldots, a_n^*)^T \in \mathbb{R}^m$ que minimiza $||\mathbf{x} - \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{e}_i||_2$. [0.5 pts]

(b) Considere os seguintes vetores:

$$\mathbf{x} = (9.4862, 20.7922, -0.8406, 16.5821, -8.4970)^T,$$
$$\mathbf{e}_1 = (5.1548, 4.8626, -2.1555, 3.1096, -6.5763)^T,$$
$$\mathbf{e}_2 = (4.1209, -9.3633, -4.4615, -9.0766, -8.0574)^T.$$

Encontre valores $a_1^*$ e $a_2^*$ tal que

$$||\mathbf{x} - (a_1^*\mathbf{e}_1 + a_2^*\mathbf{e}_2)||_2 = \min_{a_1, a_2 \in \mathbb{R}} ||\mathbf{x} - (a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2)||_2 \,. \text{ [1.5 pts]}$$

*Veja as outras questões no verso.*

4. Considere a seguinte situação em um jogo de tênis: O jogador A avança em direção a rede enquanto o jogador B, localizado à 1 metro atrás da sua linha de base, rebate uma bola paralela à linha lateral da quadra a uma altura de 80 cm. A bola atravessa a rede a uma altura de 1.4 metros do chão. A bola passa pelo jogador A a uma altura de 1.2 metros quando ele está a uma distância de 3.5 metros da rede.

   Utilize *interpolação quadrática* (pela forma de Newton ou Lagrange) para determinar o lugar onde a bola irá cair no chão considerando que o comprimento da quadra é 23.77 metros. Utilize a segunda imagem anexada para marcar este lugar incluindo a sua distância em relação a linha de base do jogador A. [3 pts]

## ALGUMAS FÓRMULAS E TABELAS

---

$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$

$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) + f(\frac{\sqrt{3}}{3})$, $x = \phi(t) = \frac{1}{2}[a + b + t(b - a)]$

$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) + f(\frac{\sqrt{3}}{3})$

$|E_{TR}| \leq \frac{(b-a)h^2}{12} M_2$, onde $M_2 = \max_{x\in[a,b]}|f''(x)|$

$|E_{SR}| \leq \frac{(b-a)h^4}{180} M_4$, onde $M_4 = \max_{x\in[a,b]}|f^{(4)}(x)|$

---

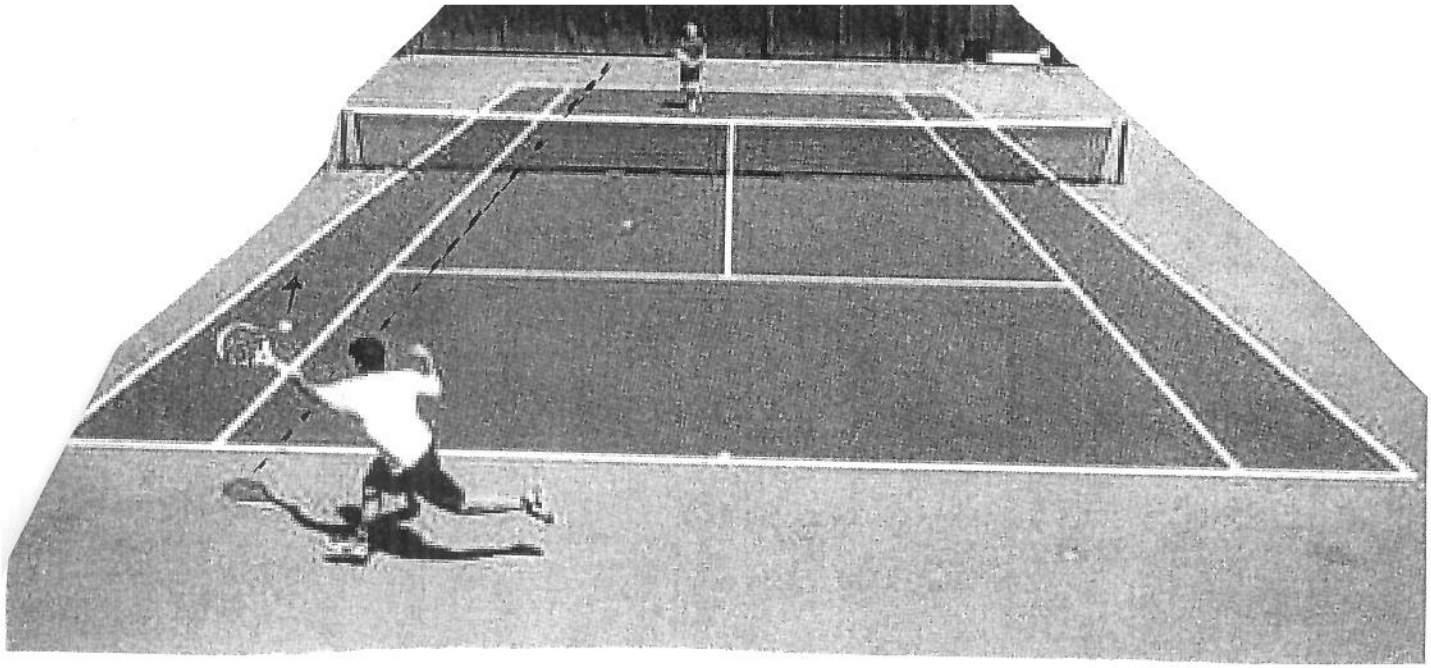
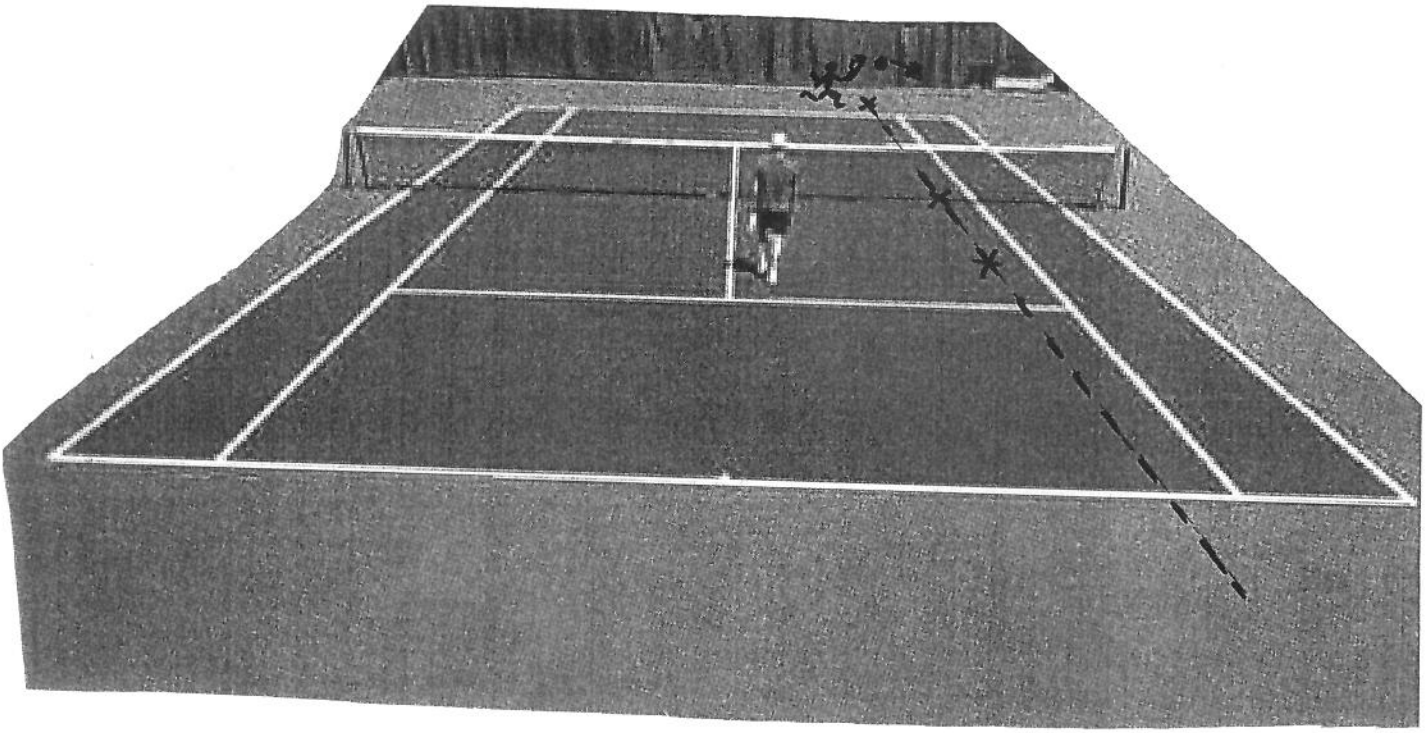
| $x$ | $y$ | $y' = f(x, y)$ | $\Delta y \approx y'h$ |
|---|---|---|---|
| | | | |

| $x$ | $y$ | $y' = f(x, y)$ | $y''$ | $\Delta y \approx y'h + y''\frac{h^2}{2}$ |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

| $x_k$ | $y_k$ | $y'_k = f(x_k, y_k)$ | $\bar{y}_{k+1} = y_k + y'_k h$ | $\bar{y}'_{k+1} = f(x_{k+1}, \bar{y}_{k+1})$ | $\Delta y_k \approx (y'_k + \bar{y}'_{k+1})\frac{h}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |

---

| $k$ | $x^{(k)}$ | $F(x^{(k)})$ | $\|\|F(x^{(k)})\|\|_\infty$ | $\|\|s^{(k-1)}\|\|_\infty$ | $s^{(k)}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |

---

$y'(x_k) \approx \dfrac{y_{k+1} - y_k}{h}$ ; $y'(x_k) \approx \dfrac{y_k - y_{k-1}}{h}$ ; $y'(x_k) \approx \dfrac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h}$ ; $y''(x_k) \approx \dfrac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2}$.