MS211 - Turma D - Prova 2 - 26/06/2024

Nome: RA:

Utilize **4 digitos decimais** em todas as questões! Não precisa escrever zeros não significativos. (Por exemplo, pode escrever 0.5 ao invés de 0.5000.) Somente faça o que está pedido. **Justifique as suas respostas!** Boa prova!

1. O modelo SIR (Suscetível-Infectado-Recuperado) é um modelo epidemiológico fundamental que descreve a dinâmica de uma doença infecciosa dentro de uma população. Ele utiliza um sistema de equações diferenciais e possui dois parâmetros principais que governam a propagação e o declínio da doença, a saber a Taxa de Transmissão (β) e a Taxa de Recuperação (γ). Sejam $S(t)$, $I(t)$ e $R(t)$ as populações dos susceitiveis, infectados e recuparados, respectivamente, no tempo t (em dias). Supondo que não tenha nascimentos e mortes, o modelo SIR pode ser descrito por

$$\begin{cases} S' &= -\beta I \frac{S}{N} \\ I' &= \beta I \frac{S}{N} - \gamma I \\ R' &= \gamma I \\ S(0) &= S_0 \\ I(0) &= I_0 \\ R(0) &= R_0 \end{cases}$$

Suponha que $\beta = 0.1$ e $\gamma = 0.2$. Além disso, sejam $N = 45$, $S_0 = 25$, $I_0 = 15$ e $R_0 = 5$ (em milhões de pessoas). Seja $Y(t) = (S(t), I(t), R(t))^T$ para todo $t \geq 0$.

Aplique o método de Euler Aperfeiçoado em forma tabelar com $h = 0.25$. Preenche os espaços marcados com ... da tabela da forma seguinte. Utilize a fórmula específica da derivada para este problema particular sempre que aparecem expressões de derivadas. [2.25 pts]

Faça uma cópia dessa tabela em formato paisagem no verso desta página. Durante a prova, a Questão 1 será colocada no telão para facilitar a sua tarefa.

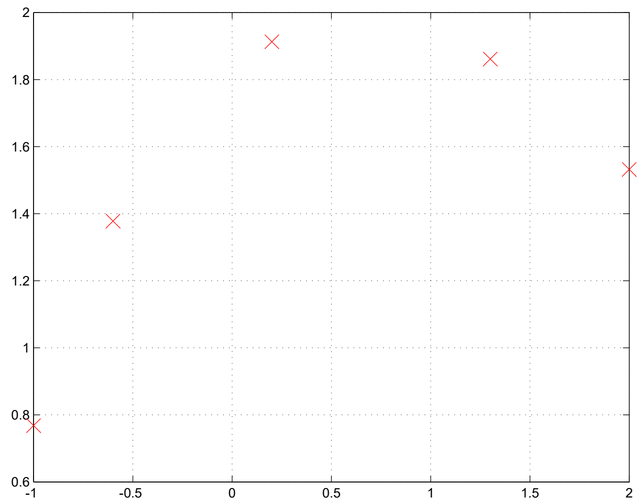
(a)

t_k	$Y_k = \begin{pmatrix} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{pmatrix}$	$Y'_k = \begin{pmatrix} \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{pmatrix}$	$\bar{Y}_{k+1} = \ldots\ldots = \begin{pmatrix} \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{pmatrix}$	$\bar{Y}'_{k+1} = \begin{pmatrix} \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{pmatrix}$	$\Delta Y_k =$ ....
0	....	....	....	....	....
0.25	....				

(b) Quais são as suas estimativas para as populações dos susceitiveis, infectados e recuparados, respectivamente, depois de 6 horas? [0.25 pt]

2. Considere os dados da seguinte tabela, plotados na figura em baixo.

x	-1	-0.6	0.2	1.3	2
y	0.7682	1.3781	1.9128	1.8615	1.5323



(a) Sabendo-se que estes dados são aproximadamente dispersados num círculo de raio r com centro em $(c, 0)$, ajuste uma curva da forma $g(x) = \sqrt{r^2 - (x-c)^2}$ aos dados acima. (Dica: Como passo intermediário, sugere-se converter este problema para $x^2 + y^2 \approx \alpha_1 + \alpha_2 x$.) [2 pt]

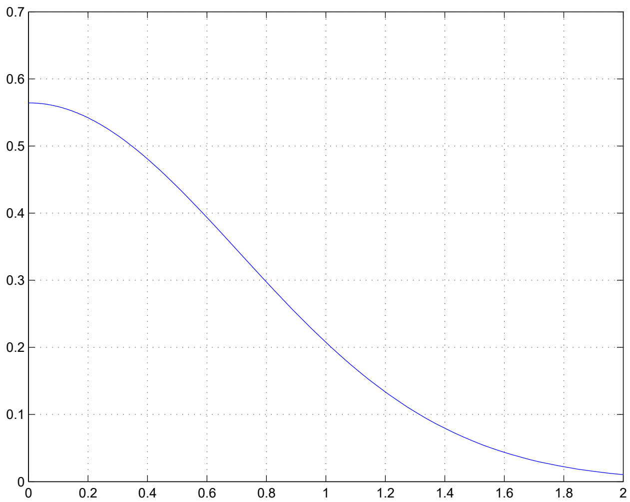
(b) Qual é o resíduo, quer dizer o erro em termos da soma dos quadrados dos desvios obtido neste ajuste? Indique claramente como se calcula este resíduo sem fazer as contas. [0.25 pts]

(c) Utilize o seu resultado do item (a) para calcular $g(0)$. [0.25 pt]

3. A densidade de probabilidade de uma distribuição normal com média 0 e variança $\frac{1}{2}$ é dada por

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}.$$

A figura seguinte mostra o gráfico de $p(x)$ no intervalo $[0, 2]$.



(a) Utilize interpolação polinomial *quadrática* pela forma de Newton para encontrar o polinômio $p_2(x)$ de grau ≤ 2 que interpola $p(x)$ nos pontos 0, 0.5 e 1. [0.75 pt] Lembre-se que

$$p_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \ldots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}).$$

(b) Sabemos o seguinte: Se p_n é o polinômio que interpola f em pontos igualmente espaçados

$$x_k = x_0 + kh, \quad \forall k = 0, 1, \ldots, n,$$

então o erro da interpolação polinomial satisfaz

$$|E_n(x)| = |f(x) - p_n(x)| \leq \frac{M_{n+1} h^{n+1}}{4(n+1)},$$

em que

$$M_{n+1} = \max_{x \in [x_0, x_n]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Use o fato que o valor máximo de $|p'''(x)|$ no intervalo $[0, 1]$ ocorre em $x \approx 0.5246$ para determinar um limitante superior de $|p(x) - p_2(x)|$ para todos $x \in [0, 1]$. [0.75]

(c) Utilize interpolação polinomial *quadrática* pela forma de Newton para encontrar o polinômio $q_2(x)$ de grau ≤ 2 que interpola $p(x)$ nos pontos 1, 1.5 e 2. [0.75]

(d) Use o fato que o valor máximo de $|p'''(x)|$ no intervalo $[1, 2]$ ocorre em $x = 1$ para determinar um limitante superior de $|p(x) - q_2(x)|$ para todos $x \in [1, 2]$. [0.25]

4. Considere $p(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$.

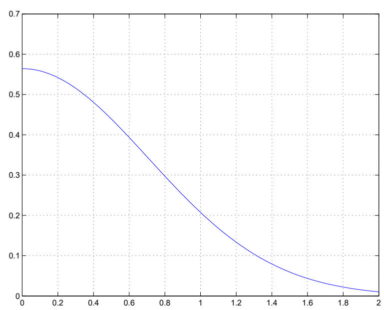
(a) Utilize a Regra de Simpson Repetida com 2 subintervalos (usados para efeitos de interpolação) para estimar $\int_0^2 p(x)dx$. [0.5 pt]
Lembre-se que a Regra de Simpson Repetida, que utiliza $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ como nós de interpolação, é dada por

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\big[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \ldots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\big].$$

(b) Suponha que você desconhece a fórmula apresentada no item a).Como poderia utilizar os polinômios $p_2(x)$ e $q_2(x)$ encontrados na Questão 3 para obter a estimativa de $\int_0^2 p(x)dx$ dada pela Regra de Simpson Repetida com 2 subintervalos? Justifique a sua resposta através de uma fórmula sem fazer contas. [0.25 pt]

(c) Utilize os resultados dos itens 3 b) e d) para obter um limitante superior do valor absoluto da diferênça entre $\int_0^2 p(x)dx$ e a sua estimativa dada pela Regra de Simpson Repetida com 2 subintervalos. [0.75 pt]

(d) Utilize a figura seguinte para fazer uma interpretação gráfica da área que corresponde à estimativa de $\int_0^2 p(x)dx$ dada pela Regra de Retângulos Repetida com 2 subintervalos. Sombreie a área em questão usando um lápis e marque os nós de interpolação utilizados usando cruzes. [0.5 pt]



(e) Utilize a figura seguinte para fazer uma interpretação gráfica da área que corresponde à estimativa de $\int_0^2 p(x)dx$ dada pela Regra de Trapézios Repetida com 2 subintervalos. Sombreie a área em questão usando um lápis e marque os nós de interpolação utilizados usando cruzes. [0.5 pt]