Cálculo Numérico (MS211) PROVA 1 (27/09/2011)

Nome: ______________________________ RA: __________ Turma: ______

Trabalhe com 4 *dígitos decimais nas Questões 1 e 4*!!! Responde a todas perguntas e explicite as contas. Boa sorte!

---

1. Uma corrente oscilante em um circuito elétrico é descrito por

$$I = 10e^{-t}\sin(2\pi t)\,,$$

onde t é dado em segundos.

(a) Determine uma aproximação para o último momento tal que $I = 2$ utilizando o Método de Newton(-Raphson) com $t_0 = 1.5$ e precisões $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-3}$. Apresente os resultados em forma tabelar. [1.5 pts]

k	t_k	$f(t_k)$	$t_k - t_{k-1}$
0	1.5		

(b) A seguinte figura mostra $f(t) = 10e^{-t}\sin(2\pi t) - 2$ para $t \in [0.9, 1.65]$. Chegamos a mesma raiz que no item (a) utilizando o chute inicial $t_0 = 1.65$? Justifique a sua resposta através de duas iterações gráficas do Método de Newton(-Rhaphson). Calcule t_1 e t_2 para conferir o seu desenho. [1 pt]

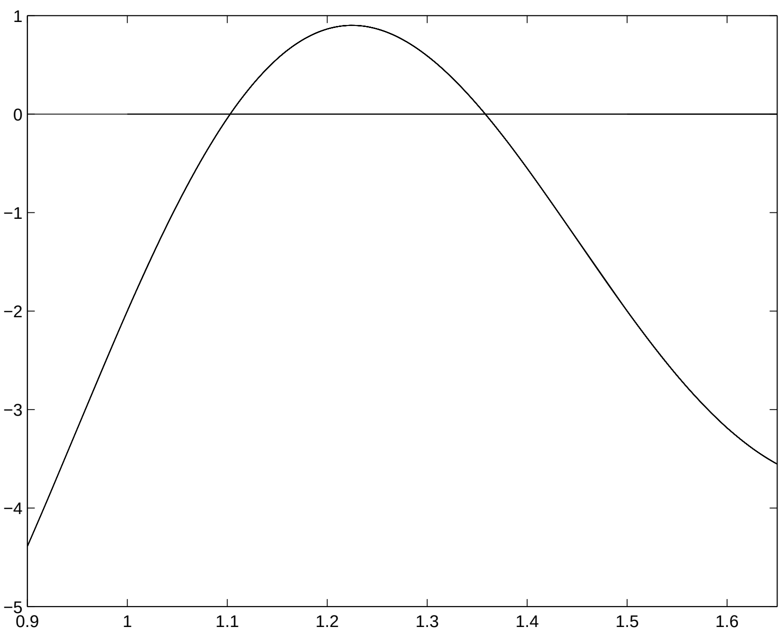

Figure 1: $10e^{-t}\sin(2\pi t) - 2$

2. Considere uma maquina que trabalha no sistema decimal com aritmética de ponto flutuante utilizando arredondamento e 5 dígitos na mantissa. Sejam A e b tais que

$$A = \begin{pmatrix} -0.20000 \cdot 10^{-6} & 0.50000 \cdot 10^{0} \\ 0.20000 \cdot 10^{0} & 0.10000 \cdot 10^{0} \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 0.50000 \cdot 10^{0} \\ 0.30000 \cdot 10^{0} \end{pmatrix}.$$

   (a) Calcule $0.1 \cdot 10^0 + 0.5 \cdot 10^6$ na maquina. Qual é o erro relativo? [0,5 pts]

   (b) Resolve $Ax = b$ usando Eliminação Gaussiana sem pivoteamento parcial nesta maquina. (Não precisa detalhar as operações no sistema de ponto flutuante.) [0,5 pts]

   (c) Resolve $Ax = b$ usando Eliminação Gaussiana com pivoteamento parcial nesta maquina. (Não precisa detalhar as operações no sistema de ponto flutuante.) [0,5 pts]

   (d) Compare a qualidade das soluções x_a e x_b obtidas em (a) e (b) e comente sobre as diferenças nas soluções. [1 pt]

3. Sejam $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Considere o problema de encontrar uma matriz $X \in \mathbb{R}^{n\times m}$ tal que $AX = B$.

   (a) Verifique que resolver $AX = B$ é equivalente a resolver m sistemas lineares com a mesma matriz de coeficientes. [0.5 pts]

   (b) Considere um sistema linear da forma $Ax = b$ com $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $b \in \mathbb{R}^n$. O escalonamento da matriz aumentada para obter a forma triangular superior requer aproximadamente $2/3n^3$ flops (operações na aritmética de ponto flutuante). Portanto a decomposição de A na forma $A = LU$ também custa aproximadamente $2/3n^3$ flops. A resolução de um sistema triangular custa aproximadamente n^2 flops. Dado estes fatos, você escolheria Eliminação Gaussiana ou a Decomposição LU para resolver $AX = B$ com $n = 9$ e $m = 3$? [1 pt]

4. Considere a matriz A abaixo.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Seja $b = (-3, 6, 5)^t$. Obtenha um sistema linear equivalente $\tilde{A}x = \tilde{b}$ através de troca de linhas tal que o critério de Sassenfeld é satisfeito. O que pode ser concluido sobre a convergência dos métodos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel? [1.5 pts]

   (b) Escolhe um chute incial $x^{(0)} \in \mathbb{Z}^3$ tal que $||\tilde{A}x^{(0)} - \tilde{b}||_\infty \leq 1$. Aplique o método de Gauss-Seidel com este chute inicial e $\varepsilon = 0.15$. Apresente os seus resultados finais na seguinte forma: [2 pts]

k	$x^{(k)}$	$d_r(x^{(k)}, x^{(k-1)})$

   onde

$$d_r(x^{(k)}, x^{(k-1)}) = \frac{||x^{(k)} - x^{(k-1)}||_\infty}{||x^{(k)}||_\infty} = \frac{\max_{1\leq i\leq n} |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}|}{\max_{1\leq i\leq n} |x_i^{(k)}|}$$