MS211 - Turma K - Prova 1 - 07/10/2025

Nome: RA: Faltas:

Utilize **4 digitos decimais** em todas as questões! Não precisa escrever zeros não significativos. (Por exemplo, pode escrever 0.5 ao invés de 0.5000.) **Justifique as suas respostas**. Boa prova!

1. Considere a seguinte matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & 3 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determine a fatoração LU com pivoteamento parcial da matriz A. Para tanto, utilize um vetor $\mathbf{p}$ para lembrar das posições das linhas, matrizes $R^{(i)}$ e - se for necessário - $R^{(i)'}$, para $i = 1, 2$. Denote os resultados desta fatoração LU usando os símbolos L, U e P. [1.5 pts]

   (b) Qual é a relação entre as matrizes A, L, U e P? Responde a este pergunta numa linha e sem fazer cálculos. [0.25 pt]

   (c) Considere o passo k do Método de Newton Modificado no qual é necessário resolver um sistema linear da forma

$$J(\mathbf{x}^{(0)})\mathbf{s}^{(k)} = -F(\mathbf{x}^{(k)}).$$

   Suponha que seja necessário executar vários passos e que $J(\mathbf{x}^{(0)})$ seja uma matriz não-esparsa grande.

   i. Qual é o benefício de utilizar a fatoração LU nesta situação? [0.25 pt]

   ii. Como se usa a fatoração LU no Método de Newton Modificado para resolver $J(\mathbf{x}^{(0)})\mathbf{s}^{(k)} = -F(\mathbf{x}^{(k)})$ para $k = 0, 1, \ldots$? [0.5 pt]

2. (a) Considere $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, sendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Determine C e $\mathbf{g}$ tal que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é equivalente a $\mathbf{x} = C\mathbf{x} + \mathbf{g}$. Em seguida, utilize C para verificar se A satisfaz o critério das linhas.

No caso afirmativo, quais as consequências para a convergência de uma sequência gerada pelo Método de (Gauss-)Jacobi aplicado à resolução de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a partir de qualquer chute inicial $\mathbf{x}^{(0)}$?

Caso contrário, podemos dizer que, dado um chute inicial qualquer $\mathbf{x}^{(0)}$, a sequência gerada pelo Método de (Gauss-)Jacobi aplicado à resolução de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ não converge?

[0.75 pt]

(b) Considere $\tilde{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, sendo

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Verifique se $\tilde{A}$ satisfaz o critério de Sassenfeld.

No caso afirmativo, quais as consequências para a convergência de uma sequência gerada pelo Método de Gauss-Seidel aplicado à resolução de $\tilde{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a partir de qualquer chute inicial $\mathbf{x}^{(0)}$?

Caso contrário, podemos dizer que, dado um chute inicial qualquer $\mathbf{x}^{(0)}$, a sequência gerada pelo Método de Gauss-Seidel aplicado à resolução de $\tilde{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ não converge?

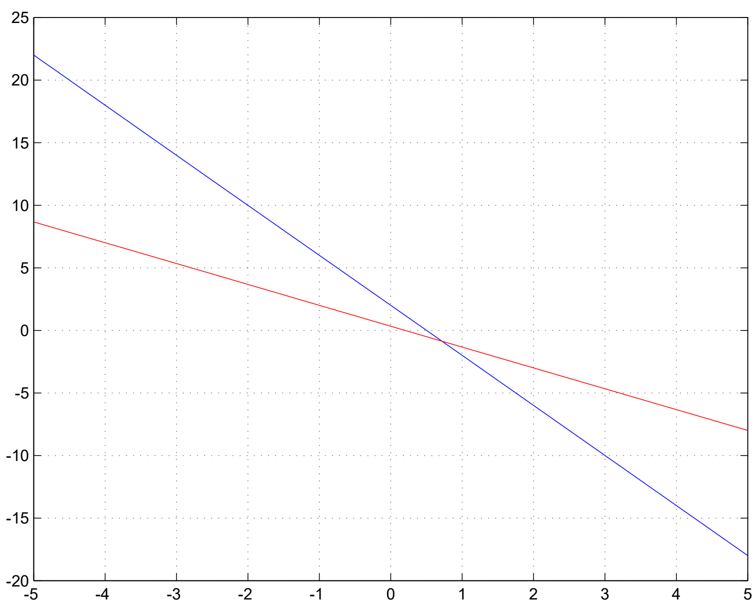
[0.75 pt]

(c) Seja $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)^T$ a solução do sistema linear $\tilde{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ do item (b). Qual é a solução $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*)^T$ do sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ do item (a) em termos de $\tilde{x}_1$ e $\tilde{x}_2$? Justifique a sua resposta [0.5 pt]

(d) Considere o sistema linear $\tilde{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ do item (b). Faça uma interpretação gráfica como se obtem $(x_1^{(1)}, x_2^{(0)})^T$, $\mathbf{x}^{(1)}$, $(x_1^{(2)}, x_2^{(0)})^T$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ através de uma aplicação do Método de Gauss-Seidel ao sistema linear $\tilde{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ do item (b) usando $\mathbf{x}^{(0)} = (-3, 10)^T$ como chute inicial.

Para facilitar a sua tarefa, segue um gráfico das retas que correspondem às equações do sistema linear. Indique qual reta corresponde à primeira equação. Use cruzes para marcar as localizações de $\mathbf{x}^{(0)}$, $(x_1^{(1)}, x_2^{(0)})^T$, $\mathbf{x}^{(1)}$, $(x_1^{(2)}, x_2^{(0)})^T$ e $\mathbf{x}^{(2)}$. Use flechas para indicar as transições $\mathbf{x}^{(0)} \to (x_1^{(1)}, x_2^{(0)})^T \to \mathbf{x}^{(1)} \to (x_1^{(2)}, x_2^{(0)})^T \to \mathbf{x}^{(2)}$.

[0.75 pt]



3. Encontrar raizes de polinômios é um problema relevantes para muitas aplicações. Por exemplo, uma aplicação concreta onde é necessário encontrar a raiz de um polinômio é na engenharia estrutural ao analisar as características de estabilidade e vibração de estruturas. Não existe uma fórmula geral que possa encontrar as raízes de uma equação polinomial arbitrária de grau cinco ou superior. No caso de um polinômio de grau 3, existe uma fórmula, mas ela é muito complicada. Por isso, faz sentido aplicar o Método de Newton-Raphson a este problema. Considere

$$f(x) = x^3 - 7.3524 * x^2 + 15.4086 * x - 8.8708.$$

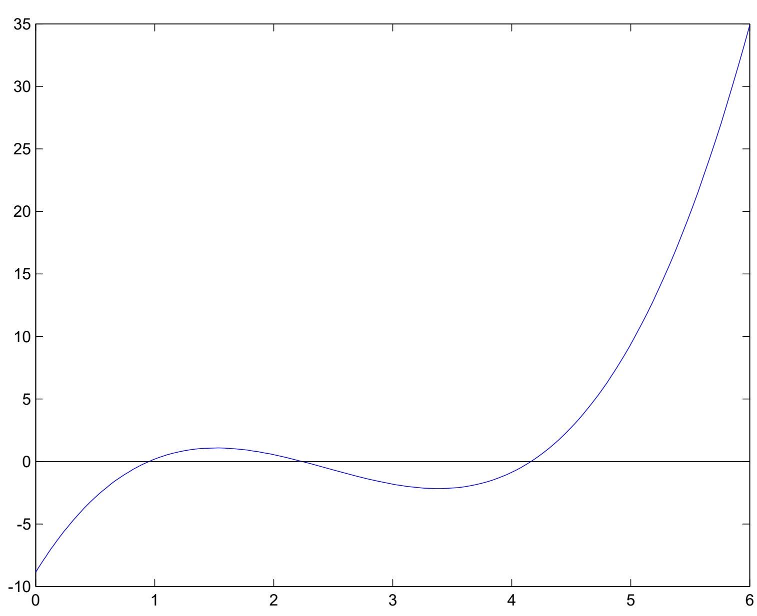
(a) Considerando o chute inicial $x_0 = 4$ e $\varepsilon = 10^{-2}$, execute o método de Newton-Raphson até $|f(x_k)| < \varepsilon$ ou $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$ e preenche espaços marcados com ... da tabela em baixo. Exibe os detalhes necessários, em particular $f'(x)$ e a fórmula utilizada para gerar x_{k+1} a partir de x_k. Qual é a aproximação obtida de uma raíz de f? [1.5 pts]

k	x_k	$f(x_k)$	$\|x_k - x_{k-1}\|$
0	4	$\ldots$	$-$
1	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
2	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

(b) Podemos afirmar que, sob as condições apresentados na aula, a ordem de convergência do Método de Newton-Raphson é *linear* OU *pelo menos quadrática*? Dica:

O que significa a sua resposta para uma sequência convergente $(x_k)_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ gerada pelo Método de Newton-Raphson sob essas condições? (Utilize $e_k = x_k - \xi$ para $k = 0, 1, \ldots$, sendo $\xi = \lim_{k \to \infty} x_k$.) [0.5 pt]

(c) A figura em baixo mostra o gráfico de $f(x)$ no intervalo $[0, 6]$. Faça uma interpretação gráfica de duas iterações do Método de Secante com chutes iniciais $x_0 = 3$ e $x_1 = 5$ e obtenha x_2 e x_3 gráficamente. [0.5 pt]



4. Considere um braço robótico simplificado com dois elos de comprimentos $L_1 = 5$ e $L_2 = 5$, movendo-se em um plano bidimensional. As coordenadas alvo do efetor final são (x, y), e as incógnitas são os dois ângulos θ_1 e θ_2 das juntas.

   Suponha que a primeira junta do braço robótico é localizada na origem, quer dizer a posição $(0, 0)$ e as coordenadas alvo são $(3, 5)$ e, inicialmente, as coordenadas alvo são $(5, 5)$ o que implica que a segunda junta está localizada na posição $(5, 0)$ e $\Theta^{(0)} = (\theta_1^{(0)}, \theta_2^{(0)})^T = (0, \frac{\pi}{2})^T$ (em radianos). Portanto, queremos encontrar um vetor $\Theta = (\theta_1, \theta_2)^T$ que satisfaz o seguinte sistema não-linear:

$$\begin{cases} 5[\cos(\theta_1) + \cos(\theta_1 + \theta_2)] = 3 \\ 5[\sin(\theta_1) + \sin(\theta_1 + \theta_2)] = 5 \end{cases}$$

   (a) Faça uma interpretação gráfica da posição inicial do braço robótico e marque as coordenadas alvo $(3, 5)$ usando uma cruz. [0.25 pt]

   (b) Execute *dois passo* do método de Newton com a aproximação inicial $\Theta^{(0)} = (\theta_1^{(0)}, \theta_2^{(0)})^T = (0, \frac{\pi}{2})^T$ (em radianos) e preenche os espaços marcados com ... da tabela seguinte. Explique como você fez as contas, em particular qual é a matriz Jacobiana e como foram obtidos $s^{(0)}$, $\Theta^{(1)}$, $s^{(1)}$ e $\Theta^{(2)}$. [1.75 pt]

k	$\Theta^{(k)}$	$F(\Theta^{(k)})$	$\|\|F(\Theta^{(k)})\|\|_\infty$	$\|\|s^{(k-1)}\|\|_\infty$	$s^{(k)}$
0	...	...	...	–	...
1	...	...	...	...	...
2	...	...	...	...	

   (c) Use uma outra figura para esboçar a posição do braço robótico que corresponde aos ângulos obtidos $\theta_1^{(2)}$ e $\theta_2^{(2)}$. Marque também as coordenadas alvo $(3, 5)$ usando uma cruz. [0.5 pt]