

1. (a) Fat. LU sem pivoteamento

$$Ax = b \Leftrightarrow L(Ux) = b$$

(1) Resolve $L_S \cdot y = b$

$$y_S = \begin{pmatrix} -0.4 \\ 9.64 \\ 49.834 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -0.4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 9.64 \\ 10 & -4.351 & 1 & 0 & 42 \end{pmatrix} \begin{matrix} y_1 = -0.4 \\ -0.8 + y_2 = 9.64 \Rightarrow y_2 = 10.44 \\ -4 - 45.414 + y_3 = 0.42 \Rightarrow y_3 = 49.834 \end{matrix}$$

(2) Resolve $U_S \cdot x = y$

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 1.1 & 3.1 & 1 & -0.4 \\ 0 & 2.3 & -5.84 & 1 & 10.44 \\ 0 & 0 & -49.1 & 1 & -49.834 \end{pmatrix} \begin{matrix} x_1 = 2(-0.4 - 2.2036 + 3.096) = 0.9848 \\ 2.3x_2 + 5.824 = 10.44 \Rightarrow x_2 = \frac{10.44 - 5.824}{2.3} = 2.0033 \\ x_3 = -\frac{-49.834}{-49.1} = -0.9987 \end{matrix}$$

(b) Fat. LU com pivoteamento

$$PAx = Pb \Leftrightarrow L(Ux) = Pb$$

$$x_S = \begin{pmatrix} 0.9848 \\ 2.0033 \\ -0.9987 \end{pmatrix}$$

(1) Resolve $L_C \cdot y = Pb$

$$y_C = \begin{pmatrix} 0.42 \\ 9.556 \\ -2.659 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0.42 \\ 0.2 & 1 & 0 & 1 & 9.64 \\ 0.1 & 0.232 & 1 & 1 & -0.4 \end{pmatrix} \begin{matrix} y_1 = 0.42 \\ 0.084 + y_2 = 9.64 \Rightarrow y_2 = 9.556 \\ 0.042 + 2.217 + y_3 = -0.4 \Rightarrow y_3 = -2.659 \end{matrix}$$

(2) Resolve $U_C \cdot x = y$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0.96 & 6.5 & 1 & 0.42 \\ 0 & 4.31 & -0.94 & 1 & 9.556 \\ 0 & 0 & 2.67 & 1 & -2.659 \end{pmatrix} \begin{matrix} x_1 = \frac{0.42 - 1.92 + 6.5 \cdot 0.9959}{5} = 0.9947 \\ x_2 = \frac{9.556 + 0.9361}{4.31} = 2.0000 \\ x_3 = -\frac{2.659}{2.67} = -0.9959 \end{matrix}$$

$$x_C = \begin{pmatrix} 0.9947 \\ 2 \\ -0.9959 \end{pmatrix}$$

(c) $x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \|x^* - x_S\|_\infty = 1 - 0.9848 = 0.0156$

e $\|x^* - x_C\|_\infty = 1 - 0.9947 = 0.0054$

$\|x^* - x_S\|_\infty > \|x^* - x_C\|_\infty$. Isto não surpreende porque a maioria dos casos conseguimos reduzir os erros numéricos devidos a perdas de informações significativas usando a técnica de pivoteamento.

$$2, (a) \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -\frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

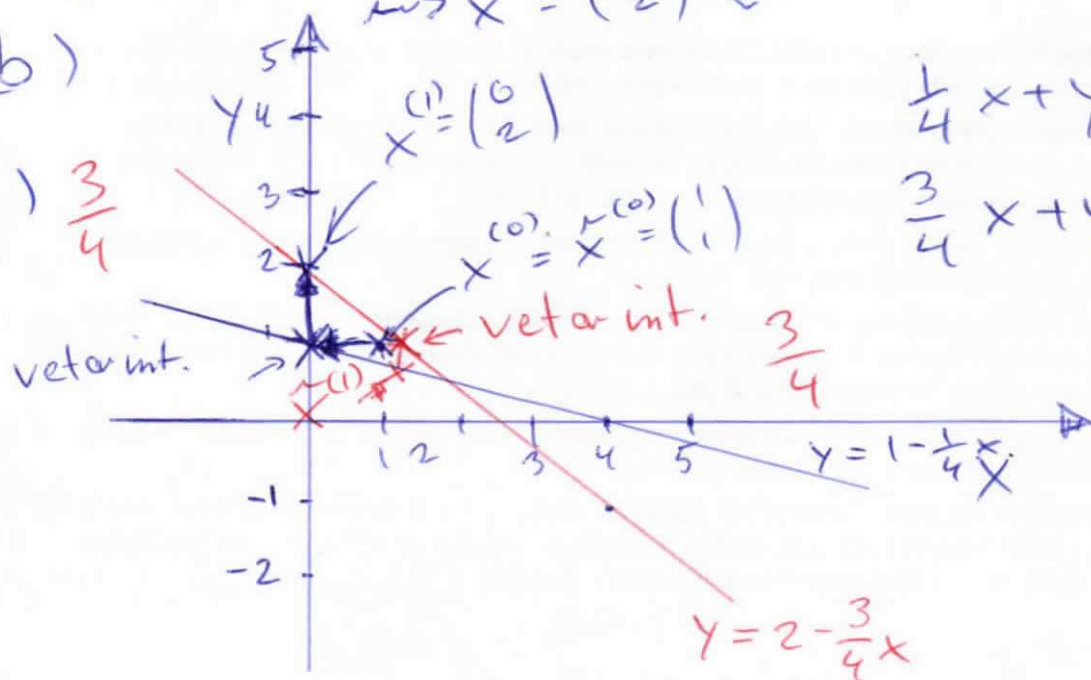
$$(0 \ -4) \cdot x^{(1)} + 4 = (0 \ -4) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 = 0 \quad \frac{1}{2}$$

$$\left(-\frac{3}{4} \ 0\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 = 2 \quad \rightarrow \text{veta. intermediário} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(b)

$$(f) \quad \frac{3}{4}$$



$$\frac{1}{4}x + y = 1 \Leftrightarrow y = 1 - \frac{1}{4}x$$

$$\frac{3}{4}x + y = 2 \Leftrightarrow y = 2 - \frac{3}{4}x$$

(c)

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 1 \\ \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{A}x = \hat{b} \quad \frac{1}{4}$$

$$(d) \quad \hat{C} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{4}{3} \\ -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{g} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow |\hat{C}| = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \rho_1 = \frac{4}{3} > 1 \quad \downarrow$$

Não podemos afirmar que: critério de Sassenfeld não satisfeito (critério de convergência)

(1) o método de Gauss-Seidel ^{suficiente} converge com qualquer chute inicial;

(2) o método de Gauss-Seidel não converge com algum chute inicial.

2. (e)

$$\left(0 - \frac{4}{3}\right) \cdot \hat{x}^{(0)} + \hat{g}_1 = \left(0 - \frac{4}{3}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

$\leadsto \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ veta intermediário

$$\left(-\frac{1}{4} \quad 0\right) \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix} + 1 = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \hat{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$\frac{1}{2}$

3. a) O problema pode ser resolvido encontrando o zero de $G-T$ no intervalo $\frac{1}{4}$ $(0.4, 0.5)$. Neste intervalo, a função T é igual à reta $R(x) = \frac{1}{0.3}x - 1$. ^{$\frac{1}{4}$} Portanto, procuramos um zero em $(0.4, 0.5)$ de

$$f(x) = e^{-\frac{(x-0.4)^2}{0.002}} - \frac{1}{0.3}x + 1$$

$$f'(x) = -\frac{2(x-0.4)}{0.002} \cdot e^{-\frac{(x-0.4)^2}{0.002}} - \frac{1}{0.3}$$

$$= -1000 \cdot e^{-\frac{(x-0.4)^2}{0.002}} - 3.3333$$

(b) $f(0.45) = e^{-\frac{(0.45-0.4)^2}{0.002}} - 0.45 \cdot 3.3333 + 1$

$$= e^{-1.25} - 1.5 + 1 = e^{-1.25} - 0.5 = -0.2135$$

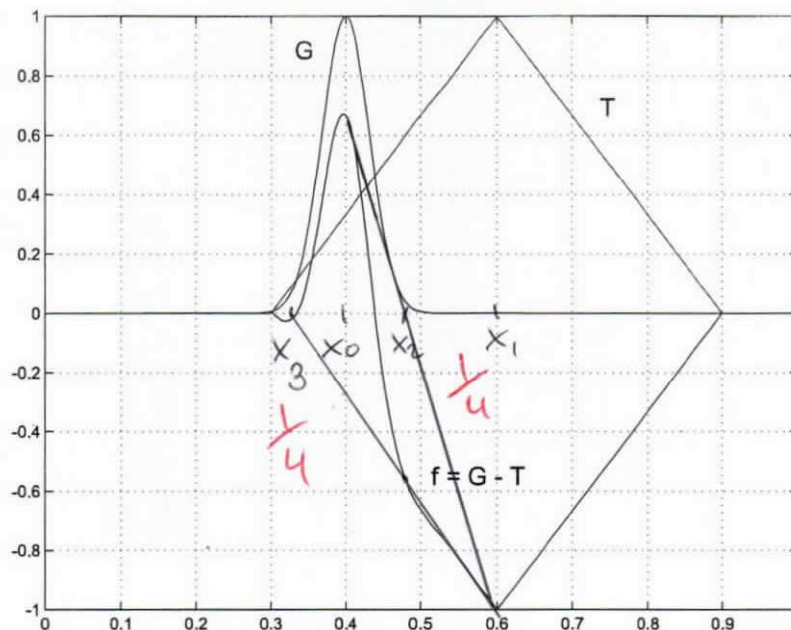
(a) $X_{k+1} = X_k - \frac{f(X_k)}{f'(X_k)} = X_k + \frac{e^{-\frac{(X_k-0.4)^2}{0.002}} - \frac{1}{0.3}X_k + 1}{1000(X_k-0.4)e^{-\frac{(X_k-0.4)^2}{0.002}} - \frac{1}{0.3}}$

(c) No método de secante, substituímos o termo $f'(X_k)$ da fórmula de Newton-Raphson por $\frac{f(X_k) - f(X_{k-1})}{X_k - X_{k-1}}$ obtendo

$$X_{k+1} = X_k - \frac{f(X_k)(X_k - X_{k-1})}{f(X_k) - f(X_{k-1})}$$

$$= \frac{X_{k-1}f(X_k) - X_k f(X_{k-1})}{f(X_k) - f(X_{k-1})}$$

$\frac{1}{4}$



3. A figura em cima mostra uma função triangular T , a função Gaussiana G dada por

$$G(x) = e^{-\frac{(x-0.4)^2}{0.002}}.$$

e a função $f = G - T$.

Suponha que queremos encontrar ξ tal que $G(\xi) = T(\xi)$ e $\xi = \max\{x \in \mathbb{R} \mid G(x) = T(x)\}$.

- (a) Como pode-se resolver o problema acima usando o método de Newton-Raphson? Qual é a iteração de Newton-Raphson neste caso particular, quer dizer, como se gera x_{k+1} a partir de x_k ? Qual é a função f cujo zero procuramos e o que é f' ? [0.75 pts] 1,25 pts
- (b) Considerando o chute inicial $x_0 = 0.45$ e $\varepsilon = 10^{-1}$, execute o método de Newton-Raphson até $|f(x_k)| < \varepsilon$ ou $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$ e preenche a seguinte tabela: [0.75 pts] 1 pt

k	x_k	$f(x_k)$	$ x_k - x_{k-1} $
0	0.45	-0.2135	-
1	0.4378	0.0277	0.0121

- (c) Como gera-se x_{k+1} a partir de x_k e x_{k-1} usando o método da secante? [0.25 pts]
- (d) Sejam $x_0 = 0.4$ e $x_1 = 0.6$. Use a figura acima para encontrar x_2 e x_3 graficamente usando o método da secante. [0.5 pts]

$$4c) \quad G(r, c_1, c_2) = \nabla f(r, c_1, c_2)$$

$$= \begin{bmatrix} 4r < 2r^2 - (u_1 - c_1)^2 - (u_2 - c_2)^2 - (v_1 - c_1)^2 - (v_2 - c_2)^2 > \\ 2 < r^2 - (u_1 - c_1)^2 - (u_2 - c_2)^2 > (+2(u_1 - c_1)) \\ + 2 < r^2 - (v_1 - c_1)^2 - (v_2 - c_2)^2 > (+2(v_1 - c_1)) \\ 2 < r^2 - (u_1 - c_1)^2 - (u_2 - c_2)^2 > 2(u_2 - c_2) \\ + 2 < r^2 - (v_1 - c_1)^2 - (v_2 - c_2)^2 > 2(v_2 - c_2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4r < 2r^2 - (u_1 - c_1)^2 - (u_2 - c_2)^2 - (v_1 - c_1)^2 - (v_2 - c_2)^2 > \\ 4 < [r^2 - (u_1 - c_1)^2 - (u_2 - c_2)^2](u_1 - c_1) + \\ [r^2 - (v_1 - c_1)^2 - (v_2 - c_2)^2](v_1 - c_1) > \frac{1}{2} \\ 4 < [r^2 - (u_1 - c_1)^2 - (u_2 - c_2)^2](u_2 - c_2) + \\ [r^2 - (v_1 - c_1)^2 - (v_2 - c_2)^2](v_2 - c_2) > \end{bmatrix}$$

c) Dado $x^{(k)}$, resolva-se $f(x^{(k)})$. $s^{(k)} = -G(x^{(k)})$ $\frac{1}{4}$

Dado $s^{(k)}$ (a solução),

$\frac{1}{4}$ $x^{(k+1)} = s^{(k)} + x^{(k)}$.